

# **Versagensprognose von Faser-Kunststoff-Verbunden basierend auf einer Mehrskalenbetrachtung**

Von der Fakultät Maschinenwesen  
der Technischen Universität Dresden  
zur  
Erlangung des akademischen Grades  
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)  
im kooperativen Promotionsverfahren  
angenommene Dissertation

Dipl.-Ing.(FH) Dominic Hühn  
geboren am 1. Juli 1987 in Marburg

Tag der Einreichung: 31.03.2016  
Tag der Verteidigung: 26.10.2016

Promotionskommission:

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing.habil. M. Gude
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. T. Pyttel
	Prof. Dr.-Ing.habil. V. Ulbricht
Mitglieder:	Prof. Dr.-Ing. T. Wallmersperger
	Prof. Dr.-Ing.habil. Dipl.-Wirt.-Ing C. Cherif



## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Technischen Hochschule Mittelhessen im Rahmen einer kooperativen Promotion mit der Technischen Universität Dresden. Gefördert wurde sie von der VOLKSWAGEN AG, bei dessen Verantwortlichen ich mich hiermit bedanke.

Besonderen Dank gebührt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Thomas Pyttel, der mich sehr herzlich betreut und stets gefördert hat. Speziell die vielen offenen Diskussionen und Anregungen waren zur Realisierung dieser Arbeit und zur Entwicklung meiner Selbst von großen Wert. Die Arbeit im Labor und die gemeinsame Entwicklung von Vorrichtungen haben mir immer viel Spaß bereitet.

Ebenso danke ich Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht für das Interesse an meiner Arbeit, sowie die wegweisenden Worte und Gedankenanstöße aus seinem Erfahrungsschatz, die mich immer aufs Neue beeindruckt haben.

Einen speziellen Dank gilt Dr. André Berger für die Bereitstellung seines Mesomodells für das GFK-Rohr, sowie die wertvollen Diskussionen im Bereich der Mikro- und Mesomodellierung.

Bei Dipl.-Ing. Benjamin Kaiser bedanke ich mich für die vielen fachlichen Diskussionen und das Motivieren neben dem Tagesgeschäft für den sportlichen Ausgleich zu sorgen.

Schließlich danke ich meiner Familie und besonders dir – liebe Kristin – für deine Unterstützung und Geduld während der gesamten Zeit.

Friedberg, den 10.12.2016

Dominic Hühn





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Kinematik – Spannungsmaße	5
2.2	Stoffgleichungen	8
2.3	Wirkebenebezogene Versagensbedingungen	13
<b>3</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen und Modellierungen der Grundwerkstoffe</b>	<b>19</b>
3.1	E-Glas Filament	19
3.1.1	Mechanische Eigenschaften	19
3.1.2	Materialmodell	19
3.2	Epoxidharz Matrix	19
3.2.1	Experimentelle Untersuchungen	19
3.2.2	Entwicklung und Kalibrierung eines geeigneten Materialmodells	25
3.2.3	Beurteilung des Materialmodells in einer skalierten Mikroumgebung	35
<b>4</b>	<b>Bruchkurvenprognose mittels Mikromodelle</b>	<b>38</b>
4.1	Kohäsivzonenmodell	38
4.2	Druckversuch am unidirektional verstärkten FKV-Prüfkörper	41
4.3	Modellierungsstrategie	43
4.4	Effektives Materialverhalten und Bruchkurvenprognose von Mikrostrukturen	53
<b>5</b>	<b>Versagensprognose eines GFK-Rohrs mit einem Makro- und Mesomodell</b>	<b>58</b>
5.1	Druckversuch am Glasfaser/Epoxidharz-Rohr	58
5.2	Geometrische Modellierung des GFK-Rohrs	59
5.3	Werkstoffmodell für den Roving	60
5.4	Versagensprognose des Druckrohrs mittels Makro- und Mesomodell	64
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>75</b>
A.1	Vergleich elastischer Stoffgesetze - St. Venant / Truesdell / Jaumann	75
A.2	Numerische Implementierung des Drucker-Prager Fließgesetzes	78

## Abbildungsverzeichnis

1	Bruchkurvenermittlung von unidirektionalverstärkten FKV-Strukturen	2
2	Transversale Isotropie am Beispiel Faser-Kunststoff-Verbund	8
3	Typisches Spannungs-/Dehnungsdiagramm bei eindimensionalem Zug	10
4	MOHRsche Bruchhypothese	13
5	Wirkebenebezogenes Versagen am Beispiel Druck	13
6	Versagensbedingung nach TRESCA	14
7	Versagensbedingung nach COULOMB-MOHR	15
8	Versagsflächen: (a) VON MISES, (b) DRUCKER-PRAGER	15
9	Bruchfläche am FKV	16
10	PUCKs Interaktion der Spannungskoordinaten auf der ZF-Bruchfläche	17
11	Probengeometrie Zugversuch Epoxidharz	20
12	Spannungs-/Dehnungsdiagramm Zugversuch Epoxidharz	21
13	JACOBISChe Determinante Zugversuch Epoxidharz	21
14	Zugproben nach Bruch	22
15	Probengeometrie Druckversuch Epoxidharz	22
16	Spannungs-/Dehnungsdiagramm Druckversuch Epoxidharz	23
17	Deformation, Lokalisierung und Bruch einer Epoxidharz-Druckprobe	24
18	Probengeometrie Torsionsversuch Epoxidharz	24
19	Torsionsvorrichtung	25
20	Spannungs-/Gleitungsdiagramm Torsionsversuch Epoxidharz	26
21	Deformation, Lokalisierung und Bruch einer Epoxidharz-Torsionsprobe	26
22	VON MISES Vergleichsspannung / hydrostatischer Druck	27
23	Flißspannungsverlauf und Bruchdehnungen der Matrix	30
24	Bruchdehnung des Epoxidharzes abhängig vom Spannungszustand	31
25	Vergleich zwischen Epoxidharzexperimenten und Simulationen	32
26	Epoxidharzproben bei Bruch Experiment und Simulation	33
27	Geometrie der skalierten Mikroproben	35
28	Skaliertes Mikromodell – Vergleich Experiment und Simulation	36
29	Bruchvorgang zweier skalierten Mikroproben	37
30	Kohäsivzonenelement in einem Voxelnetz	38
31	Herstellungsprozess von unidirektional verstärkten FKV-Prüfkörper	41
32	Spannungs-/Dehnungsdiagramm FKV-Prüfkörper unter Drucklast	42
33	Bruchverlauf von FKV-Prüfkörpern unter Drucklast	42
34	Repräsentatives Volumenelement (RVE) mit periodischen Randbedingungen zur Modellierung von FKV	43
35	Mögliche Filamentanordnungen von RVEs	44
36	Gegenüberstellung der Vernetzungsmethoden mit einer Elementkantenlänge von $L_E \approx 0,5 \mu\text{m}$ (a) reguläres Netz (b) Voxelnetz	46
37	Vergleich zwischen regulärem Netz und Voxelnetz mit unterschiedlicher Elementkantenlängen $L_E$	46
38	Einfluss der 2D-RVE-Größe im Spannungs-/Dehnungsdiagramm	48
39	Einfluss der Filamentanordnung und der Filamentanzahl auf das Bruchbild von RVEs	49

40	Einfluss von $f_{KZ}$ auf die Spannungskurve des ausgewählten 2D-RVEs im Fall 1	50
41	Einfluss von $f_{KZ}$ auf die Spannungskurve des ausgewählten 2D-RVEs im Fall 2	50
42	Einfluss von $f_{KZ}$ auf die Spannungskurve des ausgewählten 2D-RVEs im Fall 3	51
43	Vergleich der 2D-RVEs nach Bruch mit $f_{KZ} = 0, 6$ . (a) Fall 2, (b) Fall 3	52
44	2D-RVE zur Bestimmung des effektiven elastischen Materialverhaltens und der Bruchkurven	53
45	Auf Basis der virtuellen Experimente ermittelten $\bar{\tau}_{\perp\perp} / \bar{\sigma}_{\perp}$ und $\bar{\tau}_{\perp\parallel} / \bar{\sigma}_{\perp}$ Bruchkurven eines Glasfaser/Epoxidharz-Verbunds mit einem Faservolumengehalt von $\phi = 0, 60$	55
46	Auf Basis der virtuellen Experimente ermittelten $\bar{\tau}_{\perp\perp} / \bar{\sigma}_{\perp}$ und $\bar{\tau}_{\perp\parallel} / \bar{\sigma}_{\perp}$ Bruchkurven eines Glasfaser/Epoxidharz-Verbunds mit einem Faservolumengehalt von $\phi = 0, 77$	56
47	Glasfaser/Epoxidharz-Druckrohr unter Drucklast	58
48	Modellierung des Glasfaser/Epoxidharz-Rohrs	59
49	Darstellung des Rovingmodells am Beispiel $\perp$ -Zugversuch	61
50	Modellvergleich der virtuellen Experimente (virt. Exp.) aus Abbildung 44 und dem Rovingmodell	63
51	Simulation des Druckversuchs aus Abschnitt 5.1 mit dem Makromodell	64
52	Simulation des Druckversuchs aus Abschnitt 5.1 mit dem Mesomodell	66
53	Modellvergleich der virtuellen Experimente (virt. Exp.) aus Abbildung 44 und dem Rovingmodell mit den modifizierten Parameter	68
54	Simulation des Druckversuchs aus Abschnitt 5.1 mit dem Mesomodell und angepassten Bruchparametern	69
55	Modellvergleich (34), (36) und (38) unter Zuglast ohne Querdehnung	76
56	Modellvergleich (34), (36) und (38) unter einfachen Schub	77



## Tabellenverzeichnis

1	E-Glas EC 1200-315 – Mechanische Eigenschaften entsprechend des Herstellerdatenblattes [39] und Angaben von SCHÜRMANN [29] . . . .	19
2	Elastische und plastische Materialparameter für das Epoxidharzmodell	29
3	Zwangsbedingungen im Kohäsivzonenelement zur Bestimmung der homogenisierten, elastischen Konstanten . . . . .	39
4	Versagensparameter des Kohäsivzonenelements bei bestmöglicher Haftung zwischen Filament und Matrix . . . . .	45
5	Versagensparameter für die Kohäsivzone kalibriert an FKV-Druckproben	52
6	Effektive transversal isotrope Elastizitätsparameter für den Glasfaser-Epoxidharz-Verbund mit $\phi = 0,60$ und $\phi = 0,77$ . . . . .	54
7	Ermittelte Versagensparameter für das Puck Modell und der Wertebereich nach PUCK [22] für Glasfaser/Epoxidharz-Verbunde zur Modellierung des Zwischenfaserbruchs (ZFB) . . . . .	57
8	Ermittelte Festigkeitsparameter für das Puck Modell für Glasfaser/Epoxidharz-Verbunde zur Modellierung des Faserbruchs (FB) . . . . .	60
9	Ermittelte Bruchparameter für das Puck Modell . . . . .	62
10	Schädigungs- und Bruchparameter für das Rovingmodell, ermittelt aus Abbildung 53 . . . . .	67



## 1 Einleitung

Faser-Kunststoff-Verbunde (FKV) bieten ein gutes Leichtbaupotential und sind aus den Bestandteilen Filament und Matrix aufgebaut. Glasfilamente weisen beispielsweise einen Durchmesser von  $5 - 24 \mu\text{m}$  [29] auf. Um eine wirtschaftliche Verarbeitung zu gewährleisten, werden viele dieser Filamente zu einem Roving mit nahezu paralleler Filamentanordnung zusammengefasst. Diese Rovings werden weiter zu Textilhalmbezeugen oder speziellen Verstärkungsstrukturen, wie gewickelte Rohre verarbeitet.

FKV weisen entlang der Faserrichtung eine hohe Steifigkeit und Festigkeit auf, da die mechanischen Eigenschaften maßgeblich von den Rovings bestimmt werden. Nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit in Faserrichtung setzt der Faserbruch (FB) ein.

Eine reine Beanspruchung der Rovings in Faserrichtung ist in Strukturbauteilen gerade an Lasteinleitungsstellen nicht immer möglich. Die einbettende Matrix ist für das mechanische Verhalten des FKV in Faserquerrichtung und unter Schublast verantwortlich und muss somit die Last aufnehmen. Wird ein FKV belastet, so dass die Festigkeit der Matrix überschritten wird, setzt Zwischenfaserbruch (ZFB) ein.

Ein Festigkeitsnachweis auf ZFB ist für eine Bauteilauslegung von großer Bedeutung und kann nach aktuellem Stand der Technik [24] nur für ebene Spannungszustände dünnwandiger FKV zuverlässig prognostiziert werden. Aus diesem Grund liegt der Fokus dieser Arbeit auf der Modellierung des ZFBs in FKV. Dies erfolgt mit dem physikalisch begründeten Modell von PUCK [22]. Zur Identifikation der Modellparameter sind Bruchkurven nötig. Eine Bruchkurve beschreibt alle zum Bruch führenden Spannungszustände zweier Spannungskoordinaten. Alle übrigen Spannungskoordinaten sind Null. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 1b schematisch dargestellt.

PUCK [22] ermittelt mit dem Rohrprüfkörper aus Abbildung 1a die  $\tau_{\perp\parallel}/\sigma_{\perp}$ -Bruchkurve aus Abbildung 1b. Diese Methode stellt den Stand der Technik dar und ist mit einem hohen Aufwand in Fertigung und Experiment verbunden. Mit der  $\tau_{\perp\parallel}/\sigma_{\perp}$ -Bruchkurve allein kann der Zwischenfaserbruch von einer dreidimensionalen Struktur nicht vollständig beschrieben werden.

Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit der Ansatz verfolgt, die Bruchkurven numerisch zu bestimmen. Dazu wird der Bruch von FKV mit einem Mikromodell und der Finiten Element Methode (FEM) prognostiziert. Diese Methode wird im Folgenden als *virtuelles Experiment* bezeichnet. Dieser Sachverhalt ist schematisch in Abbildung 1c dargestellt. Neben der Möglichkeit mit dieser Methode Bruchkurven für beliebige Spannungskoordinaten zu ermitteln, können auch Bruchkurven mit beliebigem Faser-volumengehalt bestimmt werden. Zusätzlich bietet das Mikromodell Informationen über die mechanischen Vorgänge in der Struktur.

Zur Prognose des Zwischenfaserbruchs mit einem Mikromodell muss das mechanische Verhalten der Matrix bekannt sein und mit einem geeigneten Materialmodell abgebildet werden. In [7] wird eine Versuchsreihe am Epoxidharz dargestellt, die in dieser Arbeit in ähnlicher Form an dem Epoxidharzsystem L1100/EPH294 durchgeführt wird. In [10, 33, 34] werden die Fließparameter aus [26] als Basis für das Matrixmodell verwendet, um Versagensprognosen mit Mikrostrukturen zu treffen. Es wird nicht auf den Skalenübergang, des an makroskopischen Experimenten angepassten

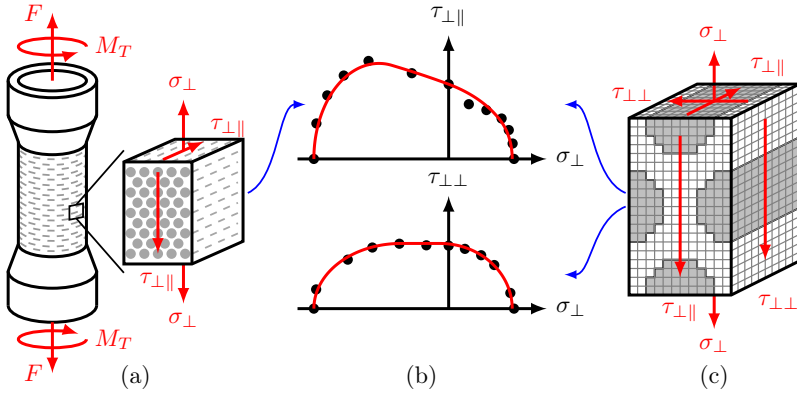


Abbildung 1: Bruchkurvenermittlung von unidirektionalverstärkten FKV-Strukturen. (a) Rohrprüfkörper zur Ermittlung der  $\tau_{\perp\parallel}/\sigma_{\perp}$ -Bruchkurve, (b) ausgewählte Bruchkurven, (c) Mikromodell zur Ermittlung beliebiger Bruchkurven

und in Mikrostrukturen verwendeten Epoxidharzmodells eingegangen. Diese Lücke soll mit dieser Arbeit geschlossen werden, indem ein geeignetes Materialmodell für das Epoxidharz entwickelt und an einer Mikrostruktur validiert wird.

Eine Versagensprognose von makroskopischen FKV ist mit Mikromodellen aufgrund der Größe des Rechenmodells nicht möglich. Aus diesem Grund wird ein Werkstoffmodell für den Roving (Rovingmodell) entwickelt, in dem nicht mehr zwischen Filament und Matrix unterschieden wird. Der Anriss in dem Rovingmodell wird mit dem Bruchkriterium nach PUCK [22] festgestellt und das Risswachstum mit einem Schädigungsmodell abgebildet. Der Bruch wird wiederum mit dem Bruchkriterium nach PUCK [22] ermittelt, so dass neben einer reinen Festigkeitsauslegung wie in [6] auch das nichtlineare Materialverhalten nach dem Anriss abgebildet werden kann. Die Kalibrierung des Rovingmodells erfolgt anhand der virtuellen Experimente mit den Mikromodellen.

Zur Bewertung der Eignung des Rovingmodells, das Versagen realistisch zu prognostizieren, wird ein Experiment an einem Glasfaser-Verstärkten-Kunststoffrohr (GFK-Rohr) durchgeführt und simulativ nachgestellt. Das GFK-Rohr wurde im Kreuzwickelprozess hergestellt und in einem quasistatischen Druckversuch geprüft.

Die geometrische Modellierung des GFK-Rohrs erfolgt mit einem Makro- und Mesomodell. Das Makromodell bildet das GFK-Rohr mit unidirektional verstärkten GFK-Schichten gemäß der Richtlinie [6] ab. Somit werden Rovings mit derselben Ausrichtung in unidirektionale Schichten gruppiert und die Rovingondulation in Schichtdicke vernachlässigt. Das Werkstoffmodell für den Roving findet in den einzelnen Schichten Anwendung. Das Mesomodell bildet hingegen die Rovingondulation des GFK-Rohrs ab, indem die einzelnen Rovings modelliert und die Zwischenräume mit Epoxidharz



gefüllt werden. Dazu muss die Rovingablage genau bekannt sein. BERGER stellt in [3] den Wickelprozess in einer Simulation nach und leitet von der so generierten Rovingablage das Mesomodell ab. Das Werkstoffmodell für den Roving wird nur in den Rovings des Mesomodells eingesetzt. Die einbettende Matrix wird mit dem Werkstoffmodell für die Matrix modelliert.

Die Mikro-, Meso- und Makrostrukturen werden mit Voxelnetzen diskretisiert, welche beispielhaft in Abbildung 1c dargestellt werden. Ein Voxelnetz stellt die Vernetzung einer Struktur mit Hexaederelementen dar, die alle eine identische Geometrie aufweisen. Die Elementflächen stimmen dabei nicht mit den Strukturflächen, wie z.B. der Filamentoberfläche überein. In den Arbeiten von Kästner [15, 16, 17] wird die Grenzfläche mit der *extended finite element method* (XFEM) in einem finiten Element beschrieben. Die Integration der XFEM in eine Standardsoftware wie PAMCRASH ist nicht über eine Benutzerschnittstelle möglich, da kein Einfluss auf die Gaußpunkte genommen werden kann. Aus diesem Grund wird ein vereinfachtes Materialmodell entwickelt, dass die Grenzfläche zwischen Filament und Matrix in einem Voxelnetz abbildet. Die Vorteile eines Voxelnetz sind die Vernetzung mit einfachen Algorithmen und der stabile Zeitschritt für eine explizite Zeitintegration, der von der kleinsten Elementkantenlänge abhängt.

Kapitel 2 beginnt mit der Bereitstellung von Grundlagen zur Entwicklung der geforderten Materialmodelle.

In Kapitel 3 werden für die beiden Bestandteile Glasfaser und Epoxidharz die benötigten Materialmodelle entwickelt und kalibriert. Für die Glasfaser werden für die Steifigkeits- und Festigkeitsparameter die Herstellerdaten und Literaturwerte verwendet. Da das Epoxidharz maßgeblich für den Zwischenfaserbruch verantwortlich ist, werden für eine detaillierte Materialprüfung Experimente an Epoxidharzproben bei uniaxialer Zuglast, uniaxialer Drucklast und Torsionslast durchgeführt. Anhand dieser experimentellen Basis wird ein geeignetes Materialmodell für das Epoxidharz entwickelt und kalibriert. Abschließend folgt die Validierung des Epoxidharzmodells an Makroproben. Dazu werden die Epoxidharzversuche simuliert und mit den Experimenten verglichen. Weiterhin wird das Materialverhalten der Matrix in einer skalierten Mikrostruktur unter Drucklast bewertet, indem wieder zwischen Experiment und Simulation verglichen wird.

In Kapitel 4 wird ein Mikromodell erarbeitet, mit dem das Versagen von unidirektional verstärkten FKV prognostiziert werden kann. Dazu wird ein Kohäsivzonenmodell für ein Voxelnetz entwickelt, dass die Grenzflächen zwischen Filament und Matrix abbildet. Anschließend wird ein unidirektional verstärkter Glasfaser-Epoxidharz-Würfel bei uniaxialer Drucklast geprüft. Das entsprechende Simulationsmodell dient der Ermittlung eines geeigneten repräsentativen Volumenelements (RVEs) und der Materialparameter für das Kohäsivzonen- und Matrixmodell auf Mikroskala. Ein Vergleich der Modellparameter der Matrix zur Abbildung der skalierten Mikroproben und der Glasfaser-Epoxidharz-Würfel ermöglicht die Interpretation der Effekte, die in der Matrix aufgrund des Skalenübergangs auftreten. Am Ende des vierten Kapitels werden Bruchkurven mit dem ermittelten RVE und dem Materialmodell berechnet und die Festigkeitsparameter für das PUCK-Modell [22] ermittelt. Die Festigkeitsparameter

des PUCK-Modells werden mit Literaturwerten [22] verglichen und eingeordnet.

In Kapitel 5 folgt die Validierung der in Kapitel 4 ermittelten Parameter für das PUCK-Modell in einem Makro- und Mesomodell. Dazu wird zunächst ein Werkstoffmodell für den Roving entwickelt, mit dem die einzelnen Schichten des Makromodells und die Rovings des Mesomodells modelliert werden können. Ein Druckversuch an einem GFK-Rohr ermöglicht die Beurteilung des Makro- und Mesomodells von dem Rohr mit dem entsprechenden FKV-Materialmodell.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Kinematik – Spannungsmaße

#### Verschiebung und Geschwindigkeit

Die materiellen Teilchen des Kontinuums werden in der Ausgangskonfiguration zur Zeit  $t = 0$  durch den Ortsvektor

$$\vec{X} = X_K \vec{e}_K \quad (1)$$

beschrieben. Dabei stellen  $X_K = \{X_1, X_2, X_3\}$  die materiellen Koordinaten und  $\vec{e}_K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  die Basisvektoren der kartesischen Basis dar. Zu einem Zeitpunkt  $t > 0$  haben sich die materiellen Teilchen zu einer neuen Position bewegt, die durch den Ortsvektor

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = x_k(\vec{X}, t) \vec{e}_k \quad (2)$$

beschrieben wird. Durch die Differenz zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration wird der Verschiebungsvektor

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X} \quad (3)$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsvektor wird durch die materielle Zeitableitung des Ortsvektors  $\vec{x}(\vec{X}, t)$  in der LAGRANGESchen Form

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial x_k(\vec{X}, t)}{\partial t} \vec{e}_k \quad (4)$$

definiert.

#### Deformation und Verzerrung

Zur Beschreibung der Deformation des Kontinuums werden zwei benachbarte materielle Punkte betrachtet, die mit dem materiellen Linienelement  $d\vec{X}$  in der Ausgangskonfiguration und  $d\vec{x}$  in der Momentankonfiguration verbunden sind. Der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} = x_{k,K} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_K = F_{kK} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_K \quad (5)$$

liefert den Zusammenhang

$$d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X} \quad (6)$$

zwischen diesen Linienelementen. Er beinhaltet die Streckung  $\mathbf{V}$  (linker Strecktensor) und die Starrkörperrotation  $\mathbf{R}$  des Linienelements. Somit gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = V_{km} R_{mK} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_K \quad (7)$$

Die JACOBISCHE Determinante

$$J = \det(F_{kK}) = \frac{dv}{dV} > 0 \quad (8)$$

wird aus den Koordinaten des Deformationsgradienten gebildet und repräsentiert das Verhältnis von Volumen  $dv$  in der Momentankonfiguration zum Volumen  $dV$  in der

Ausgangskonfiguration.

Aufgrund des Anteils der Starrkörperrotation ist der Deformationsgradient kein geeignetes Verzerrungsmaß. Stattdessen sind unter Anderem der auf die Ausgangskonfiguration bezogene LAGRANGESche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (9)$$

oder der auf die Momentankonfiguration bezogene logarithmische Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \ln(\mathbf{V}) \quad (10)$$

geeignete Maße. Betten [4, S. 56] zeigt, dass es sich bei (10) um eine isotrope Tensorfunktion handelt. Dadurch haben  $\mathbf{V}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die selben Hauptachsen  $\vec{h}_\alpha$ . Der Links-CAUCHY-GREEN-Deformationstensor

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (11)$$

stellt eine alternative Beschreibung der Deformation dar. Auch  $\mathbf{B}$  ist eine isotrope Tensorfunktion von  $\mathbf{V}$ , so dass die Hauptstreckungen  $\lambda_\alpha$  und Hauptrichtungen  $\vec{h}_\alpha$  von  $\mathbf{V}$  durch

$$\det(B_{ij} - \lambda^2 \delta_{ij}) = 0 \quad \text{und} \quad (B_{ij} - \lambda_\alpha^2 \delta_{ij}) h_\alpha = 0 \quad (12)$$

berechnet werden können. Die Hauptstreckungen  $\lambda_\alpha$  stellen jeweils das Längenverhältnis eines Linienelements in der Momentankonfiguration  $l_\alpha$  zur Ausgangskonfiguration  $L_\alpha$  dar, wobei die Linienelemente an der jeweiligen Hauptachse  $\vec{h}_\alpha$  ausgerichtet sind. Die logarithmischen Dehnungen

$$\varepsilon_\alpha = \ln\left(\frac{l_\alpha}{L_\alpha}\right) = \ln(\lambda_\alpha) \quad (13)$$

sind die Hauptwerte des logarithmischen Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , so dass für diesen die Formulierung in der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^3 \ln(\lambda_\alpha) \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\alpha \quad (14)$$

folgt. Die Tensorzerlegung von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  in Deviator und Kugeltensor entspricht der Gestaltänderung und Volumenänderung.

### Geschwindigkeitsgradient

Für die Geschwindigkeitsformulierung des Stoffgesetzes ist der Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (15)$$

von Bedeutung. Aus der Erweiterung

$$\mathbf{l} = \left( \frac{1}{2} \mathbf{l} + \frac{1}{2} \mathbf{l}^T \right) + \left( \frac{1}{2} \mathbf{l} - \frac{1}{2} \mathbf{l}^T \right) = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (16)$$

folgt der symmetrischen Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (17)$$

und der schiefsymmetrischen Drehgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad . \quad (18)$$

### Spannungsmaße und Spannungsobjektivität

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor  $\mathbf{T}$  bezieht einen Kraftvektor  $d\vec{S}$  auf ein gerichtetes Flächenelement  $d\vec{A}$  (beide in der Ausgangskonfiguration)

$$d\vec{S} = \mathbf{T} \cdot d\vec{A} \quad (19)$$

und ist energetisch konjugiert zu dem LAGRANGESchen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ . Der CAUCHYSche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  ist auf die Momentankonfiguration bezogen und bezieht den Kraftvektor  $d\vec{s}$  auf ein gerichtetes Flächenelement  $d\vec{a}$  (beide in der Momentankonfiguration)

$$d\vec{s} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\vec{a} \quad (20)$$

und ist energetisch konjugiert mit dem Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{d}$ . Beide Spannungstensoren lassen sich mit

$$\mathbf{T} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T \quad (21)$$

ineinander überführen. Die aus der materiellen Zeitableitung von  $\boldsymbol{\sigma}$  folgende Spannungsgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  ist nicht objektiv [38, S.60]. Die objektive TRUESDELLSche Spannungsgeschwindigkeit  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  wird mit der LIE-Ableitung [42, S.464] gemäß

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}) = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt} \left( J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \right) \cdot \mathbf{F}^T \\ &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{l}) \end{aligned} \quad (22)$$

bestimmt. Eine weiteres Maß ist die objektive JAUMANNsche Spannungsgeschwindigkeit  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  in der Form

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}^T \quad . \quad (23)$$

Treten große Verschiebungen, jedoch kleine Verzerrungen in einem Körper auf, so folgt näherungsweise mit [16]

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \approx \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{für} \quad |d_{ij}| \ll 1 \quad . \quad (24)$$

## 2.2 Stoffgleichungen

### Elastizität

Das HOOKEsche Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^{(4)}\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{mit} \quad |\varepsilon_{ij}| \ll 1 \quad (25)$$

postuliert einen linearen Zusammenhang zwischen dem CAUCHYschen Spannungstensor und den logarithmischen Verzerrungstensors bei kleinen Verformungen. Der Elastizitätstensor  ${}^{(4)}\mathbf{C}$  ist ein Tensor 4. Stufe mit den Symmetrien  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$  und hat somit 21 linear-unabhängige Koordinaten [1]. Ein orthotropen Materialverhalten folgt wenn drei zueinander orthogonale Symmetrieebenen existieren und es verbleiben 9 linear-unabhängige Koordinaten [1]. In einem Faser-Kunststoff-Verbund (FKV) mit paralleler Filamentanordnung (Abbildung 2) kann von transversaler Isotropie ausgegangen werden.

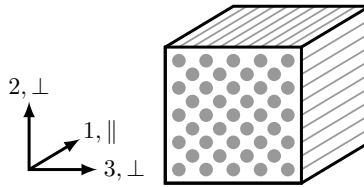


Abbildung 2: Transversale Isotropie am Beispiel Faser-Kunststoff-Verbund

Die Materialeigenschaften senkrecht zur Faserrichtung sind gleich und bekommen im Folgenden den Index  $\perp$ . Die faserparallelen Eigenschaften werden mit dem Index  $\parallel$  gekennzeichnet. Gleichung (25) erhält unter Verwendung der VOIGT-Notation und unter Annahme transversaler Isotropie die Darstellung [29]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}(1-\nu_{\perp\perp})}{\square} & \frac{\nu_{\parallel\perp} E_{\parallel}}{\square} & \frac{\nu_{\parallel\perp} E_{\parallel}}{\square} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_{\perp}(1-\nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp})}{\Delta} & \frac{E_{\perp}(\nu_{\perp\perp} + \nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp})}{\Delta} & \frac{E_{\perp}(\nu_{\perp\perp} + \nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_{\perp}(1-\nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp})}{\Delta} & \frac{E_{\perp}(\nu_{\perp\perp} + \nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp})}{\Delta} & \frac{E_{\perp}(\nu_{\perp\perp} + \nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ G_{\perp\parallel} & 0 & 0 & G_{\perp\perp} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & \\ G_{\perp\parallel} & 0 & 0 & G_{\perp\perp} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} \quad (26)$$

mit

$$\square = 1 - \nu_{\perp\perp} - 2\nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp} \quad , \quad \Delta = 1 - \nu_{\perp\perp}^2 - 2\nu_{\parallel\perp} \nu_{\perp\perp} (1 + \nu_{\perp\perp}) .$$

In (26) ist  $E$  der YOUNGSche Modul,  $\nu$  die POISSON Zahl und  $G$  der Schubmodul. Der Schubmodul  $G_{\perp\perp}$  wird gemäß

$$G_{\perp\perp} = \frac{E_{\perp}}{2(1 + \nu_{\perp\perp})} \quad (27)$$

berechnet werden [1] und ist somit kein unabhängiger Parameter. Aufgrund der Symmetrie  $C_{ijkl} = C_{klij}$  gilt

$$\frac{E_{\parallel}}{\nu_{\parallel\parallel}} = \frac{E_{\perp}}{\nu_{\parallel\perp}} \quad , \quad (28)$$

so dass transversal isotrope Materialien mit 5 linear-unabhängigen Parametern beschrieben werden.

Bei isotropen Materialien werden die Koordinaten des Elastizitätstensors mit zwei linear-unabhängigen Parametern, gemäß

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= K \delta_{ij} \delta_{kl} + G \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

berechnet. In (29) sind

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = K - \frac{2}{3} G \quad (30)$$

und

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (31)$$

die LAMESchen Konstanten und

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (32)$$

der Kompressionsmodul.

Bei der Übertragung von (25) auf große Verformungen wird energetische Äquivalenz und Objektivität bezüglich der verwendeten Spannungsmaße und Dehnungsmaße gefordert. Gleiches gilt für deren Zeitableitung. Die Verwendung des zweiten PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensors  $\mathbf{T}$  und des LAGRANGESchen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  ergibt die ST. VENANT Materialfunktion in der Form

$$\mathbf{T} = {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{E} \quad , \quad T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} . \quad (33)$$

Mit (21) wird die ST. VENANT Materialfunktion (33) auf die Momentankonfiguration bezogen

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^T \quad , \quad \sigma_{ij} = J^{-1} F_{ik} C_{klop} E_{op} F_{jl} . \quad (34)$$

Eine weitere Möglichkeit für ein Stoffgesetz bietet die Verwendung des TRUESDELLSchen Spannungsgeschwindigkeitstensors und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{d} \quad , \quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} d_{kl} . \quad (35)$$

Mit (22) folgt daraus

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{d} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T - \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{l}) \quad , \\ \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl} d_{kl} + l_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} l_{jk} - l_{kk} \sigma_{ij} . \end{aligned} \quad (36)$$

Unter Verwendung der JAUMANNschen Spannungsgeschwindigkeit

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{d} \quad , \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} d_{kl} \quad (37)$$

folgt zusammen mit (23)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{d} + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}^T \quad , \quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} d_{kl} + w_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} w_{jk}. \quad (38)$$

Ein Vergleich der drei Stoffgesetze (34), (36), (38) bezüglich großer Verformungen ist im Anhang A.1 aufgeführt.

### Plastizität

Abbildung 3 zeigt exemplarisch den Spannungs-/Dehnungsverlauf eines Zugstabs. Zwischen Ursprung und Punkt A besteht zunächst ein linear-elastischer Zusammenhang. Nach Erreichen der Fließgrenze  $\sigma_{y0}$  in Punkt A treten neben den elastischen Dehnungen  $\varepsilon^e$  auch plastische Dehnungen  $\varepsilon^p$  auf.

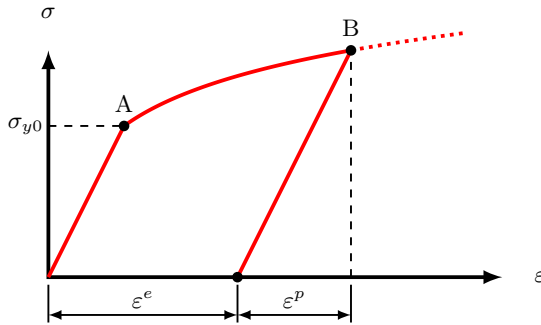


Abbildung 3: Typisches Spannungs-/Dehnungsdiagramm bei eindimensionalem Zug

In der dreidimensionalen Plastizitätstheorie, wird von der multiplikativen Aufteilung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (39)$$

in einen elastischen  $\mathbf{F}^e$  und einen plastischen Anteil  $\mathbf{F}^p$  ausgegangen. Neben der Ausgangs- und Momentankonfiguration wird somit eine plastische Zwischenkonfiguration eingeführt, die auf die Veröffentlichung von LEE [18] zurückzuführen ist. WRIGERS [42] zeigt, dass der Geschwindigkeitsgradient ausgehend von (39) additiv zerlegt werden kann

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^p \quad . \quad (40)$$

Bei der Zerlegung von (40) in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil erfolgt für den Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{d}$  und den Drehgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{w}$  ebenfalls eine additive Zerlegung in der Form:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (41)$$



und

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^p \quad . \quad (42)$$

Es wird wie in [42] die konstitutive Annahme  $\mathbf{w}^p = \mathbf{0}$  getroffen.

Mit der Fließbedingung  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) \leq 0$  wird in Abhängigkeit des Spannungszustands  $\boldsymbol{\sigma}$  und der Fließspannung  $\sigma_y$  ermittelt, ob plastisches Fließen ( $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = 0$ ) in dem aktuellen Lastschritt stattfindet oder ob es sich um einen elastischen Lastschritt ( $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) < 0$ ) handelt. Zustände  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) > 0$  sind nicht zulässig. Der plastische Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{d}^p$  wird mit der Fließregel

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (43)$$

berechnet. Mit der Ableitung des plastischen Potentials  $\Psi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)$  nach der Spannung ist die Richtung des plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensors definiert. Die skalare Multiplikation der Richtung mit dem plastischen Multiplikator  $\dot{\gamma}$  beeinflusst die Größe der Koordinaten  $d_{ij}^p$ . Die Darstellung der Fließbedingung  $\Phi = 0$  im Hauptspannungsraum wird Fließfläche genannt. Bei assoziiertem Fließen steht der plastische Deformationsgeschwindigkeitstensor senkrecht auf der Fließfläche.

Abbildung 3 zeigt zwischen Punkt A und B einen Spannungsanstieg, welcher als Verfestigung bezeichnet wird. Isotrope Verfestigung entspricht einer Skalierung der Fließfläche, welches einer Vergrößerung der Fließspannung  $\sigma_y(\alpha)$  entspricht. Die Zustandsvariable  $\alpha$  ist frei wählbar und wird der plastischen Vergleichsdehnung gleichgesetzt ( $\alpha = \varepsilon_{eq}^p$ ). Zur Bestimmung der plastischen Vergleichsdehnungsgeschwindigkeit wird der Zusammenhang

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p = \sigma_y \dot{\varepsilon}_{eq}^p \quad (44)$$

für die Dissipationsleistung postuliert, so dass mit [43]

$$\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \frac{\dot{\gamma}}{\sigma_y} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (45)$$

folgt. Da für die Fließbedingung während des plastischen Fließens  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\varepsilon_{eq}^p)) = 0$  gilt, muss auch die Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\varepsilon_{eq}^p)) \\ &= \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y(\varepsilon_{eq}^p))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{eq}^p} \dot{\varepsilon}_{eq}^p \end{aligned} \quad (46)$$

erfüllt werden. Der plastische Multiplikator ist in  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$  aufgrund von [45] vorhanden. Das Einsetzen der Fließregel [43] in das Stoffgesetz [36] zeigt die Abhängigkeit des Spannungsgeschwindigkeitstensors von dem plastischen Multiplikator in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &\stackrel{(4)}{=} \mathbf{C} : \mathbf{d}^e + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T - \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}(\mathbf{l}) \\ &\stackrel{(4)}{=} \mathbf{C} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T - \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}(\mathbf{l}) \\ &\stackrel{(4)}{=} \mathbf{C} : \left( \mathbf{d} - \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T - \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}(\mathbf{l}) \quad . \end{aligned} \quad (47)$$

Mit der Einführung des plastischen Moduls

$$H = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{eq}^p} \quad (48)$$

und den Gleichungen (45) und (47) folgt aus Gleichung (46)

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left[ {}^{(4)}\mathbf{C} : \left( \mathbf{d} - \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T - \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}(\mathbf{l}) \right] + \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \frac{H}{\sigma_y} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (49)$$

Die Umstellung nach  $\dot{\gamma}$  liefert die allgemeine Darstellung des plastischen Multiplikators in der Form

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left[ {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{d} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T - \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr}(\mathbf{l}) \right]}{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : {}^{(4)}\mathbf{C} : \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \frac{H}{\sigma_y} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}} \quad \text{mit} \quad \{\} \neq 0 \quad . \quad (50)$$

Die Ableitung  $n_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$  stellt die Normale zur Fließfläche und  $r_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}$  die Richtung des plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensors dar. Mit Einführung der Probespannungsgeschwindigkeit

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{d}^p \quad (51)$$

folgt aus (50) unter Berücksichtigung von (47)

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial}}{\mathbf{n} : {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \frac{H}{\sigma_y} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{r}} \quad . \quad (52)$$

Bei plastischem Fließen zeigt die Probespannungsgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial}$  aus der Fließfläche hinaus und die doppelte Verjüngung im Zähler von (52) ist somit stets positiv. Um eine eindeutige Lösung des plastischen Zustands zu erhalten, muss  $\dot{\gamma} \geq 0$  gelten. Der Nenner von (52) erhält somit die Reglementierung

$$\mathbf{n} : {}^{(4)}\mathbf{C} : \mathbf{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \frac{H}{\sigma_y} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{r} > 0 \quad . \quad (53)$$

Weitere Einschränkungen der Fließregel folgen aus dem mechanischen Anteil der CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung (30)

$$\mathcal{D}_{mech} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p - R(\varepsilon_{eq}^p) \varepsilon_{eq}^p \geq 0 \quad . \quad (54)$$

Die Addition der Verfestigungsfunktion  $R(\varepsilon_{eq}^p)$  mit der Fließspannung  $\sigma_{y0}$  im Ausgangszustand liefert die Fließspannung der Momentankonfiguration  $\sigma_y$  in der Form

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + R(\varepsilon_{eq}^p) \quad . \quad (55)$$

Unter Verwendung von (44) und (55) folgt aus (54) die Ungleichung

$$\mathcal{D}_{mech} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p \frac{\sigma_{y0}}{\sigma_y} \geq 0 \quad . \quad (56)$$

Für das Verhältnis der Fließspannungen gilt  $\sigma_{y0}/\sigma_y > 0$  und somit muss abhängig vom plastischen Potential  $\Psi$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p \geq 0 \quad (57)$$

erfüllt werden.

## 2.3 Wirkebenebezogene Versagensbedingungen

### Mohrs Bruchhypothese und die Verallgemeinerung auf das Versagen

Begründer der wirkebenebezogenen Bruchhypothese ist O. MOHR [21] mit der Aussage:

„Die Bruchgrenze eines Materials wird durch die Spannungen der Bruchebene bestimmt.“

Abbildung 4: MOHRsche Bruchhypothese

Seine Hypothese soll verallgemeinernd auf das Versagen bezogen werden. In Verbindung mit duktilen Materialien wird der Fließbeginn als Versagen gewählt. Bei Entfestigung gleitet das Material auf einer Ebene ab und es entstehen dabei bandförmige Bereiche mit hohen plastischen Dehnungen. Diese Bereiche werden Scherbänder genannt.

Bei spröden Materialverhalten wird der Anriss mit messbaren Steifigkeitsabfall als Versagen gewählt. In der Schädigungstheorie wird mit dem Schädigungsparameter  $D$  die Reduktion der Versagensfläche  $A$  in der Form

$$D = \frac{A_{eff}}{A} \quad \text{mit } 0 \leq D \leq 1 \quad (58)$$

beschrieben [19]. Die effektive Versagensfläche  $A_{eff}$  stellt somit die verringerte Fläche aufgrund von verschmierten Rissen dar. Beide Versagensarten sind schematisch in Abbildung 5 dargestellt.

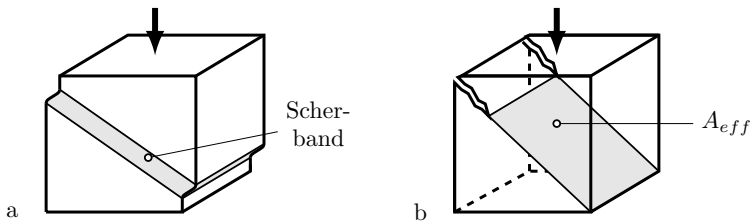


Abbildung 5: Wirkebenebezogenes Versagen am Beispiel Druck (a) duktiler und (b) spröder Materialien

### Versagshypothesen isotroper Materialien

Basierend auf einer Versagshypothese kann eine Versagensbedingung  $F_V$  formuliert werden. TRESCA [35] postulierte bei isotropen Materialien den Eintritt des Versagens bei Erreichen der maximalen Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|), \quad (59)$$

die mit dem größten Abstand zweier Hauptnormalspannungen  $\sigma_i$  bestimmt wird. Die Versagensbedingung erhält gemäß der Hypothese die Form

$$F_V = \frac{2 |\tau_{max}|}{R_Z} \leq 1. \quad (60)$$

Der Modellparameter  $R_Z$  stellt die im Zugversuch ermittelte Versagensspannung dar. Abbildung 6a zeigt die Versagensbedingung (60) mit Hilfe des MOHRschen Spannungskreises. Die zwei exemplarisch eingezeichneten Spannungskreise verdeutlichen, dass diese Hypothese keine Unterscheidung zwischen einachsigen Zug und Druck trifft. Abbildung 6b stellt die zusammengesetzten Versagensflächen von Bedingung (60) im Hauptspannungsraum dar.

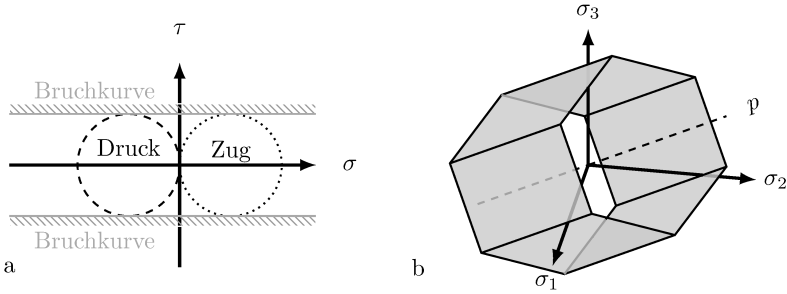


Abbildung 6: Versagensbedingung nach TRESCA: (a) MOHRsche Darstellung, (b) Versagensfläche im Hauptspannungsraum

Die COULOMB-MOHR-Versagenshypothese erweitert die TRESCA-Versagenshypothese (60) um den Normalspannungsanteil auf der Bruchfläche, so dass für die Versagensbedingung

$$F_V = \frac{2 |\tau_{max}| + c \sigma}{R_Z} \leq 1 \quad (61)$$

folgt. Der Modellparameter  $c$  wird als Kohäsion bezeichnet und ist ein Maß für die innere Reibung. In Abbildung 7 ist die lineare Abhängigkeit von der Normalspannung zu sehen. Nachteilig ist, dass die Flächennormale der Versagensfläche an den Kanten nicht eindeutig bestimmt ist. Abhilfe schafft eine Formulierung der Versagensbedingung mit Spannungsinvarianten. Die VON MISES-Vergleichsspannung

$$\sigma_{vM} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (62)$$

hängt von der zweiten Invariante  $J_2$  des Spannungsdeviators

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (63)$$

ab. Für die VON MISES-Versagensbedingung folgt

$$F_V = \frac{\sigma_{vM}}{R_Z} \leq 1. \quad (64)$$

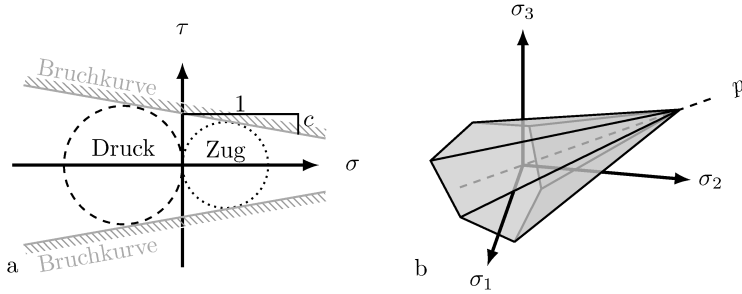


Abbildung 7: Versagensbedingung nach COULOMB-MOHR: (a) MOHRsche Darstellung, (b) Versagensfläche im Hauptspannungsraum

Abbildung 8a zeigt anhand der Versagensfläche von Bedingung (64) die Vermeidung der nicht eindeutigen Flächennormalen an den Kanten der TRESCA-Versagensbedingung (6). Die DRUCKER-PRAGER-Versagensbedingung (5)

$$F_V = \frac{\sigma_{vM} - 3Cp}{R_S} \leq 1 \quad (65)$$

stellt die Erweiterung von (64) um den hydrostatischen Druck

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad (66)$$

dar. Der Modellparameter  $R_S$  ist die unter Schub ermittelte Versagensspannung. Die Druckabhängigkeit wird mit dem Modellparameter  $C$  eingestellt. Abbildung 8b zeigt anhand der Versagensfläche von Bedingung (65) die Vermeidung der nicht eindeutigen Flächennormalen an den Kanten der COULOMB-MOHR-Versagensbedingung (7).

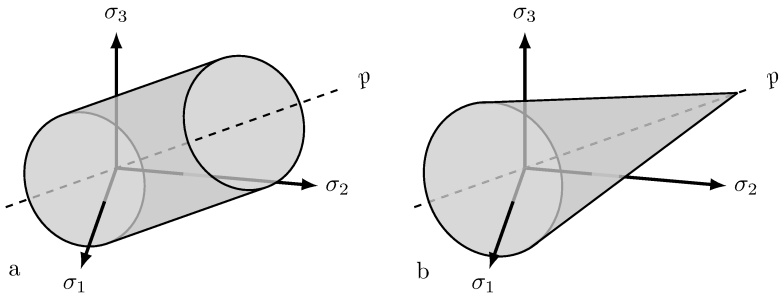


Abbildung 8: Versagensflächen: (a) VON MISES, (b) DRUCKER-PRAGER

Im Zusammenhang mit Plastizität ist es üblich Gleichung (65) in der Form

$$\Phi = \sigma_{vM} - 3Cp - \sigma_y \leq 0 \quad (67)$$

darzustellen, wobei der Versagensparameter  $R_S$  durch die Fließspannung  $\sigma_y$  ersetzt wurde.

### Versagshypothesen für Faser-Kunststoff-Verbunde (FKV)

Aufgrund des spröden Verhaltens von FKV ist es üblich von Bruchbedingungen bzw. Bruchkriterien zu sprechen [29]. Ein Überblick der Bruchkriterien ist in [27] zu finden. Nach SCHÜRMANN [29] wird die Einteilung in Globale- und Bruchtyp-Versagenskriterien getroffen. Globale Versagenskriterien vereinigen alle Koordinaten des Spannungstensors in einer Funktion. Das Resultat ist eine mathematische Beschreibung ohne physikalischen Hintergrund. Bruchtyp-Versagenskriterien unterscheiden zwischen Faserbruch (FB)

$$F_{FB} = \left( \frac{\sigma_{11}}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right)^2 = 1 \quad \begin{array}{ll} R_{\parallel}^{(+)} & \text{für } \sigma_{11} > 0 \\ R_{\parallel}^{(-)} & \text{für } \sigma_{11} < 0 \end{array} \quad (68)$$

und Zwischenfaserbruch (ZFB), wobei die Definition des Koordinatensystems in Abbildung 9a zu finden ist. Eine Form zur Beschreibung des Zwischenfaserbruchs stellt das maximale Spannungskriterium

$$F_{ZFB} = \max \left( \left( \frac{\sigma_{22}}{R_{\perp}^{(\pm)}} \right)^2, \left( \frac{\sigma_{33}}{R_{\perp}^{(\pm)}} \right)^2, \left( \frac{\sigma_{12}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2, \left( \frac{\sigma_{23}}{R_{\perp\perp}} \right)^2, \left( \frac{\sigma_{13}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right) = 1 \quad (69)$$

dar. Die Spannungskordinaten weisen bei dieser Beschreibung keine Interaktion auf.

HASHIN [12] schlug erstmals vor, die MOHRsche Bruchhypothese (Abbildung 4) auf unidirektional verstärkte Verbunde zu übertragen und PUCK [22] setzte diese Idee um. PUCK postuliert, dass die Bruchfläche eines Zwischenfaserbruchs keine Fasern durchtrennt und somit parallel zu den Fasern liegt. Abbildung 9 zeigt in (a) anhand der blauen Linien mögliche Bruchflächen und in (b) ein Koordinatensystem auf der Bruchfläche.

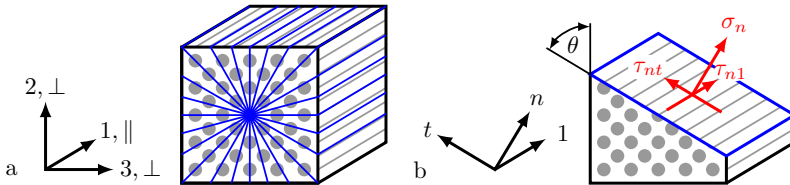


Abbildung 9: Bruchfläche am FKV: (a) mögliche Bruchflächen, (b) Spannungskordinaten auf der Bruchfläche

Der Bruch wird alleine durch die Spannungskordinaten  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  und  $\tau_{n1}$  auf der zu bestimmenden Bruchfläche ausgelöst. Die ZFB-Bedingung nach PUCK [22] wird bei positiver Normalspannung ( $\sigma_n \geq 0$ ) in der Form

$$F_{ZFB}^{(+)} = \sqrt{\left( \frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_n^2 + \left( \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n \quad (70)$$

und bei negativer Normalspannung ( $\sigma_n < 0$ ) in der Form

$$F_{ZFB}^{(-)} = \sqrt{\left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n \quad (71)$$

beschrieben. Abbildung 10 zeigt die beispielhafte Darstellung der Bruchbedingungen (70) und (71) für  $F_{ZFB}^{(\pm)} = 1$ . Die Parameter für die Materialfestigkeit ( $R_{\perp\parallel}^{(+)}$ ,  $R_{\perp\perp}^A$ ) und die Steigung ( $p_{\perp\parallel}^{(\pm)}$ ,  $p_{\perp\perp}^{(\pm)}$ ) an den Übergängen der beiden Funktionen sind ebenfalls in Abbildung 10 zu sehen.

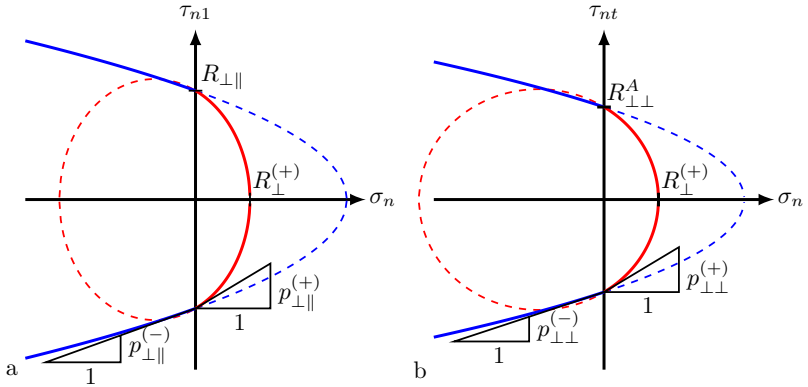


Abbildung 10: Pucks Interaktion der Spannungskoordinaten auf der ZF-Bruchfläche

Der Verlauf von  $F_{ZFB}^{(-)}$  mit der Öffnung im Druckbereich beruht auf den selben Überlegungen wie das COULOMB-MOHRsche Versagenskriterium. Eine negative Normalspannung ( $\sigma_n < 0$ ) sorgt für innere Reibung und erhöht somit die ertragbare Schubspannung. Der Faktor  $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$  vor  $\sigma_n$  in (71) bestimmt vergleichbar zur Kohäsion  $c$  in (61) die Steigung der Bruchkurve und wird mit der Interpolationsfunktion

$$\frac{p_{\perp\psi}^{(\pm)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(\pm)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2(\psi) + \frac{p_{\perp\parallel}^{(\pm)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2(\psi) \quad \text{mit} \quad \psi = \arctan\left(\frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}\right) \quad (72)$$

bestimmt. Die Gleichung (70) unterscheidet sich von (71), um die Bruchbedingung (70/71) bessere an Messergebnisse anpassen zu können [22]. Der Parameter  $R_{\perp\perp}^A$  wird mit der Druckfestigkeit  $R_{\perp\perp}^{(-)}$  senkrecht zur Faser in der Form

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp\perp}^{(-)}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})} \quad (73)$$

bestimmt [22].

Die Spannungskoordinaten auf der Bruchfläche werden mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \\ \tau_{n1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 2sc & 0 \\ -sc & sc & 0 & (c^2 - s^2) & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$c = \cos(\theta), \quad s = \sin(\theta)$$

berechnet. Da die Spannungskoordinaten  $\sigma_n$ ,  $\tau_{nt}$  und  $\tau_{n1}$  auf der selben Ebene wirken, können diese als Spannungsvektor

$$\vec{t}_n = \sigma_n \vec{e}_n + \tau_{nt} \vec{e}_t + \tau_{n1} \vec{e}_1 \quad (75)$$

zusammengefasst werden [22]. PUCK zeigt in [22], dass

$$F_{ZFB}^{(\pm)} = \frac{|\vec{t}_n|}{|\vec{t}_{ZFB}|} \quad (76)$$

gilt, wobei  $\vec{t}_{ZFB}$  dem zum Bruch führenden Spannungsvektor entspricht.  $F_{ZFB}^{(\pm)}$  ist somit ein Maß für die Entfernung von der Bruchfläche und wird aufgrund dessen auch als Anstrengung bezeichnet. Der Bruchwinkel  $\theta_B$  kennzeichnet die Fläche mit der größten Anstrengung und wird anhand einer Extremwertbetrachtung der Gleichungen (70) und (71) nach dem Einsetzen von (74) in der Form

$$F_{ZFB}^{(\pm)}(\theta_B) = \max \left( F_{ZFB}^{(\pm)}(\theta) \right) \quad (77)$$

bestimmt. Eine analytische Lösung ist aufgrund der nichtlinearen Gleichung nicht möglich. In der Richtlinie VDI 2014 [6] wird vorgeschlagen, die ZFB-Bedingung  $F_{ZFB}^{(\pm)}(\theta)$  in dem Gültigkeitsbereich  $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$  in kleinen Winkelabschnitten abzusuchen. Eine numerisch effektivere und ebenso zuverlässige Methode wird in der Veröffentlichung von SCHIRMAIER [28] vorgestellt.



## 3 Experimentelle Untersuchungen und Modellierungen der Grundwerkstoffe

### 3.1 E-Glas Filament

#### 3.1.1 Mechanische Eigenschaften

In dieser Arbeit wird als Faserverstärkung E-Glas EC 1200-315 von dem Hersteller P-D Glasseiden GmbH Oschatz verwendet. Die Daten zu der Glasfaser sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Der Filamentdurchmesser und die Zugfestigkeit sowie die Garnfeinheit stammen aus dem Datenblatt [39] des Herstellers. Die elastischen Parameter  $E$  und  $\nu$  sowie die Dichte  $\rho$  entsprechen den Angaben von SCHÜRMANN [29, S. 30]

Tabelle 1: E-Glas EC 1200-315 – Mechanische Eigenschaften entsprechend des Herstellerdatenblattes [39] und Angaben von SCHÜRMANN [29]

Dichte	$\rho$	2,54e-6	kg/mm <sup>3</sup>
POISSON Zahl	$\nu$	0,220	
YOUNG Modul	$E$	73,00	GPa
Zugfestigkeit	$R_t$	1,141	GPa
Filamentdurchmesser	$d_F$	0,017	$\mu\text{m}$

#### 3.1.2 Materialmodell

Glasfasern besitzen aufgrund der amorphen Struktur isotrope Eigenschaften. Infolge dieser Kenntnis und der geringen Bruchdehnung von Glas ist das elastische Verhalten ausreichend genau mit den Gleichungen (29) und (38) beschrieben. Als Bruchkriterium wird der Zusammenhang

$$\frac{\sigma_{vM}}{R_t} = 1 \quad (78)$$

zwischen der VON MISES Vergleichsspannung und der Zugfestigkeit  $R_t$  postuliert. Das entsprechende Materialmodell ist in dem Solver PAMCRASH [41] integriert.

### 3.2 Epoxidharz Matrix

#### 3.2.1 Experimentelle Untersuchungen

Die verwendete Matrix besteht aus den Komponenten Harz L1100 mit dem Härter EPH294. Alle verwendeten Proben sind mittels Gießprozess hergestellt, um Effekte aufgrund von mechanischer Nachbearbeitung auszuschließen.

#### Zugversuch

Die Probengeometrie für den uniaxialen Zugversuch entspricht der Norm DIN527-2 [40] und ist in Abbildung 11 dargestellt.

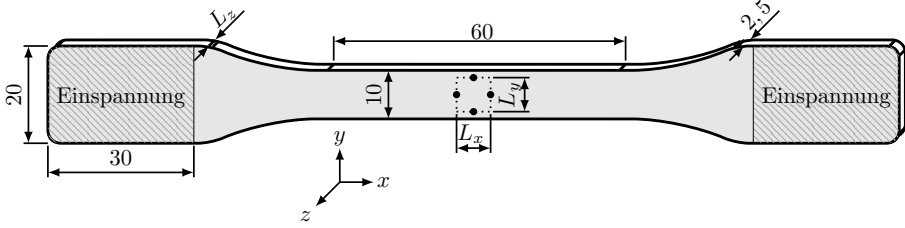


Abbildung 11: Probengeometrie Zugversuch Epoxidharz

Die vier Punkte auf der Probe (siehe Abbildung 11) dienen der optischen Dehnungsauswertung gemäß Gleichung (13). Mit der Annahme, dass die Probe in beide Zugquerrichtungen gleich kontrahiert ( $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy}$ ), kann die JACOBISCHE Determinante

$$J = \frac{l_x}{L_x} \left( \frac{l_y}{L_y} \right)^2 = \lambda_x \lambda_y^2 \quad (79)$$

berechnet werden. Bei bekannter Streckung  $\lambda_x$  und  $\lambda_y$  und gemessener Kraft  $F$  folgt aus (79) für die CAUCHY-Spannung

$$\sigma = \frac{F}{L_y L_z} \frac{\lambda_x}{J} \quad (80)$$

Die Proben sind mit einer 2,5 kN Universalprüfmaschine geprüft. Die Belastung erfolgt in den drei Geschwindigkeiten  $v = 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ,  $v = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  und  $v \approx 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ . Die Geschwindigkeit  $v \approx 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  repräsentiert eine Gleichgewichtskurve mit einer Verschiebung von  $\Delta u = 0,5 \text{ mm}$  und einer Haltezeit von  $\Delta t = 60 \text{ min}$  je Stufe.

Die berechneten Spannungen sind zusammen mit dem ermittelten YOUNGSchen Modul  $E = 3,2 \text{ GPa}$  in Abbildung 12 dargestellt. Abbildung 13 zeigt den Vergleich zwischen der aus dem Experiment und dem HOOKESchen Gesetz (38) mit der POISSON-Zahl  $\nu = 0,4$  berechneten JACOBISCHEN Determinante. Zwischen den Spannungskurven mit den Geschwindigkeiten  $v \approx 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  und  $v = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  ist der viskose Spannungsanteil deutlich zu sehen. Die Kurven der Geschwindigkeit  $v = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  und  $v = 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  sind nahezu deckungsgleich. Der viskose Spannungsanteil erreicht somit bei ausreichend hoher Geschwindigkeit einen oberen Grenzwert. Die Zugproben nach Bruch sind in Abbildung 14 für die Geschwindigkeiten  $v = 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  und  $v = 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  dargestellt. Die mit der Geschwindigkeit  $v = 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  belastete Probe (Abbildung 14a) zeigt bei makroskopischer Betrachtung ein sprödes Bruchbild. Bei der Vergrößerung (Abbildung 14b) ist eine 0,2 mm breite, plastische Einflusszone zu erkennen. Die mit der Geschwindigkeit  $v \approx 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  belastete Probe (Abbildung 14c) zeigt eine weitaus größere plastische Einflusszone. Mit der Annahme der plastischen POISSON-Zahl  $\nu' = 0,5$  folgt für die Bruchdehnung in Zugrichtung

$$\varepsilon_{Zug}^B = -\frac{1}{\nu'} \ln \left( \frac{l_y}{L_y} \right) = 0,28 \quad (81)$$

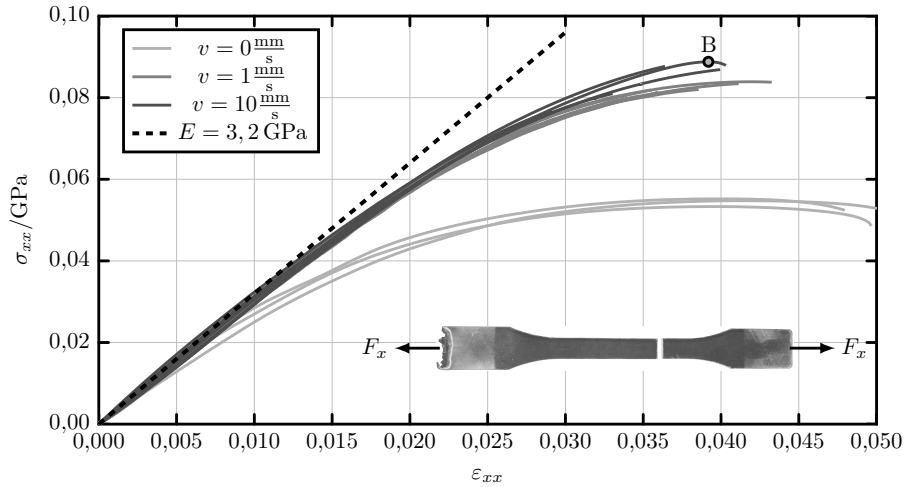


Abbildung 12: Spannungs-/Dehnungsdiagramm Zugversuch Epoxidharz

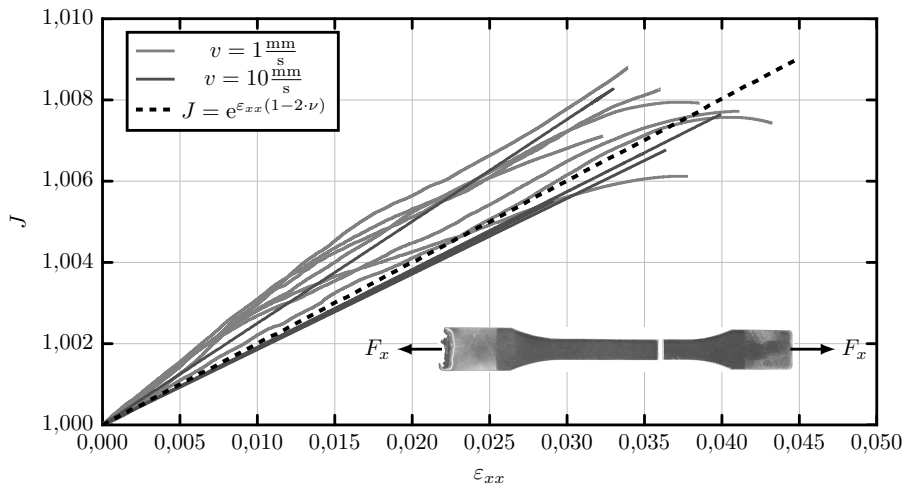


Abbildung 13: JACOBISCHE Determinante Zugversuch Epoxidharz



Alle Druckversuche sind mit einer Traversengeschwindigkeit von  $v = 100 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  durchgeführt. Polierte und mit Silikon-Gleitspray besprüht Druckplatten der Prüfmaschine sorgen für eine Minimierung der Reibung an den Kontaktflächen zu den Proben. Die vier Punkte entlang der Druckkrafttrichtung dienen der optischen Dehnungsauswertung.

Die JACOBISCHE Determinante erhält unter Annahme des uniaxialen Spannungszustands und unter Verwendung von (39) die Form

$$J = \lambda_y \lambda_z^2 = \lambda_y^e \lambda_y^p (\lambda_z^e \lambda_z^p)^2 \quad . \quad (82)$$

Unter Verwendung des HOOKEschen Gesetzes  $\lambda_z^e = (\lambda_y^e)^{-\nu}$  und  $\lambda_z^p = (\lambda_y^p)^{-\nu'}$  folgt aus (82) mit der plastischen POISSON-Zahl  $\nu' = 0,5$  bei inkompressiblen Fließen

$$J = (\lambda_y^e)^{1-2\nu} (\lambda_y^p)^{1-2\nu'} = \lambda_y (\lambda_y^e)^{-2\nu} (\lambda_y^p)^{-2\nu'} \quad . \quad (83)$$

Mit (83) und (39) wird die CAUCHY Spannung gemäß

$$\sigma_{yy} = \frac{F}{A_0} \frac{\lambda_y}{J} = \frac{4F}{\pi D^2} (\lambda_y^e)^{2\nu} (\lambda_y^p)^{2\nu'} \quad (84)$$

berechnet.

Abbildung 16 zeigt die berechnete Spannung über der Längsdehnung. Die Kurven repräsentieren die Spannungsauswertung basierend auf den Punktabstand  $L_y$ . Der schattierte Bereich stellt die lokalen Spannungsberechnungen unter Verwendung der Punktabstände  $L_1$  bis  $L_3$  dar. Den charakteristischen Punkten A bis D der Spannungskurve sind die Bilder der verformten Proben in Abbildung 17 zugeordnet.

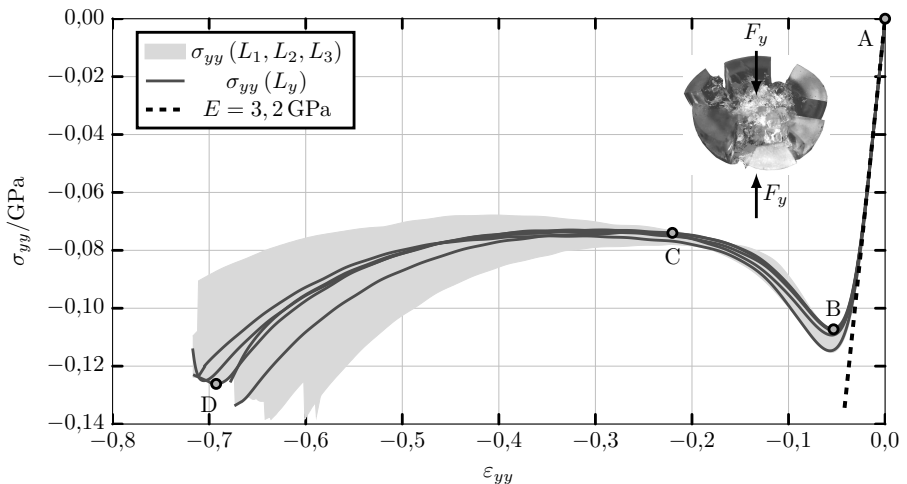


Abbildung 16: Spannungs-/Dehnungsdiagramm Druckversuch Epoxidharz

Zwischen den Punkten A und B verfestigt das Material und die Probe behält die zylindrische Form bei. Von Punkt B nach C zeigt das Material instabiles Verhalten aufgrund der Entfestigung und die Probe hat an Punkt C eine konische Form. Die Annahme des uniaxialen Spannungszustands stellt nur noch eine grobe Näherung dar. Zwischen den Punkten C und D verfestigt das Material erneut. An der Vergrößerung des grauen Bereichs in Abbildung 17 ist zuerkennen, dass die Annahme des uniaxialen Spannungszustands zunehmend schlechter wird.

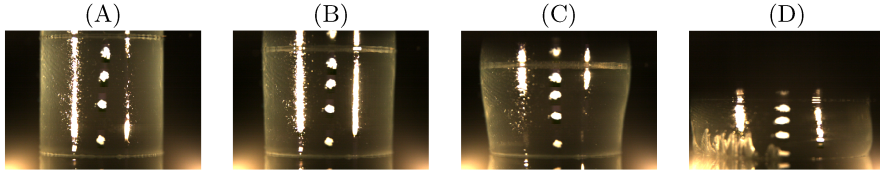


Abbildung 17: Deformation, Lokalisierung und Bruch einer Epoxidharz-Druckprobe

Der ermittelte YOUNGSche Modul  $E = 3,2 \text{ GPa}$  zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Steigung der Messkurve.

### Torsionsversuch

Die Probengeometrie für den Torsionsversuch ist in Abbildung 18 zu sehen und orientiert sich an die Veröffentlichung von FIEDLER et al. [7]. Die Messung erfolgte mit

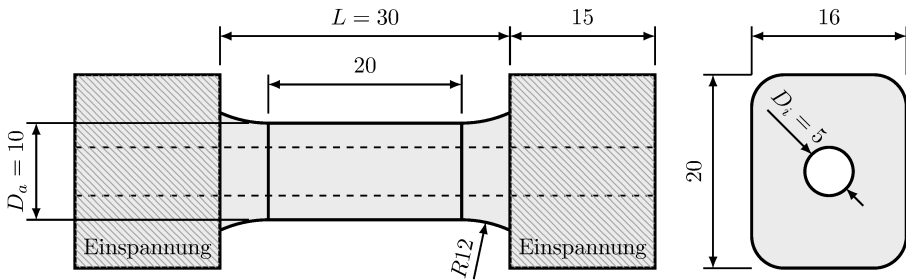


Abbildung 18: Probengeometrie Torsionsversuch Epoxidharz

der in Abbildung 19 dargestellten Torsionsvorrichtung. Die Gleitung  $\gamma$  wird aus dem gemessenen Verdrehwinkel  $\vartheta$  zwischen den Wellen 1 und 2 aus Abbildung 19 inkrementell berechnet.

$$\Delta\gamma = \Delta \frac{r}{L} \vartheta \quad \text{mit} \quad r = \frac{D_a + D_i}{4} \quad (85)$$

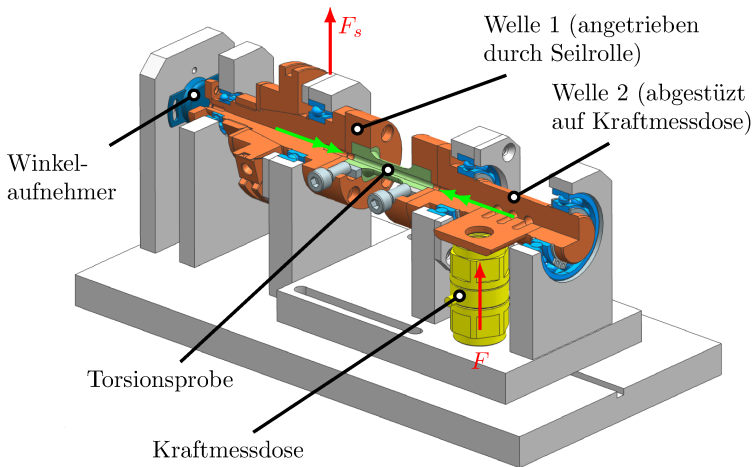


Abbildung 19: Torsionsvorrichtung

Die mittlere Schubspannung  $\tau$  wird mit

$$\tau = \frac{8 M_T (D_a + D_i)}{\pi (D_a^4 - D_i^4)} \quad (86)$$

berechnet, wobei  $M_T$  mit Hilfe der Kraft  $F$  von der Kraftmessdose und dem Hebelarm  $R$  bestimmt wird. Die Ergebnisse der Spannungsberechnung sind in Abbildung 20 dargestellt. Auch die Spannungskurve des Torsionsversuchs zeigt wie der Druckversuch das entfestigende Verhalten zwischen den Punkten B und C. Der ermittelte Schubmodul  $G = 1,125 \text{ GPa}$  zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Steigung der Messkurven. Den charakteristischen Punkten A bis D der Spannungskurve sind die Bilder der verformten Probe in Abbildung 21 zugeordnet. Zwischen den Punkten B und C ist wie auch im Druckversuch der Einfluss der Entfestigung zusehen.

### 3.2.2 Entwicklung und Kalibrierung eines geeigneten Materialmodells

#### Aufbau des Materialmodells

Die Elastizität des Materialmodells wird mit dem linearen Zusammenhang zwischen Spannungsgeschwindigkeit und Deformationsgeschwindigkeitstensor nach Gleichung (36) beschrieben. Die experimentellen Prüfungen des Werkstoffs zeigen unterschiedliche Fließeigenschaften unter Zug-, Torsion- und Drucklast. Anhand der mit B markierten Punkte in den Abbildungen 12, 16 und 20 sind der hydrostatische Druck  $p$  und die VON MISES Vergleichsspannung  $\sigma_{vM}$  berechnet und in Abbildung 22 dargestellt.

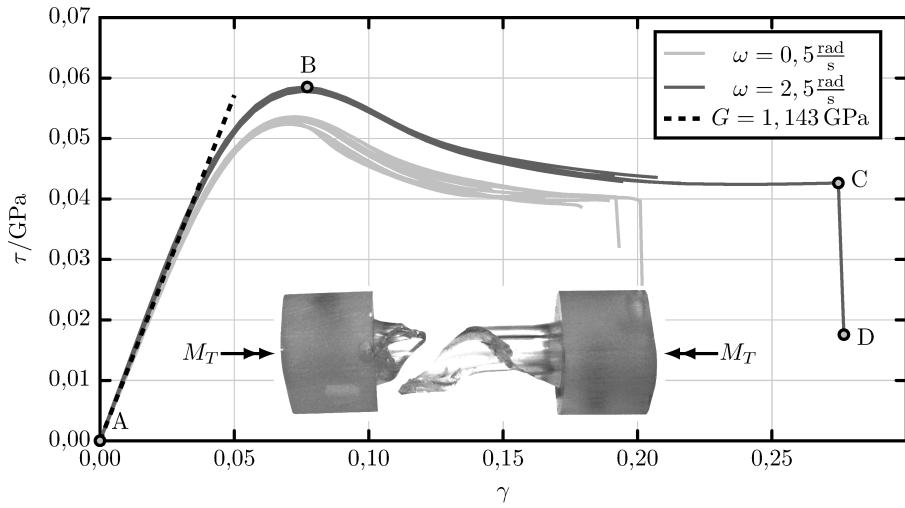


Abbildung 20: Spannungs-/Gleitungsdiagramm Torsionsversuch Epoxidharz

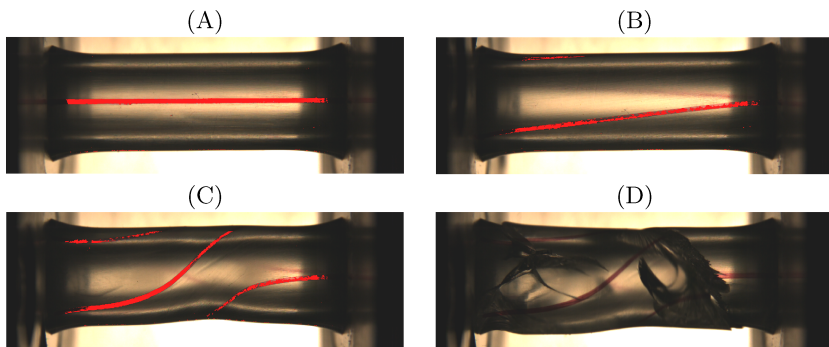


Abbildung 21: Deformation, Lokalisierung und Bruch einer Epoxidharz-Torsionsprobe



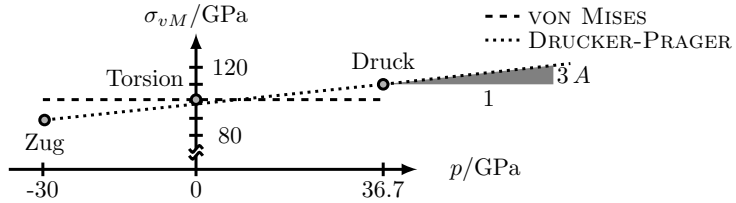


Abbildung 22: Abhängigkeit der von Mises Vergleichsspannung vom hydrostatischen Druck

Die bereits in Gleichung (67) vorgestellte Fließbedingung nach DRUCKER-PRAGER

$$\Phi = \sigma_{vM} - 3 A p - \sigma_y (\varepsilon_{eq}^p) \quad (87)$$

kann die ermittelten Werte gut abbilden. Für das plastische Potential wird eine ähnliche Funktion wie (87) verwendet:

$$\Psi = \sigma_{vM} - 3 B p - \sigma_y (\varepsilon_{eq}^p) \quad (88)$$

Mit dem Modellparameter  $B$  kann die plastische Volumenänderung eingestellt werden. Nach Gleichung (43) folgt für den plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensor unter Verwendung von (88)

$$\begin{aligned} d_{ij}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi(\sigma_{vM}, p, \sigma_y)}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= \dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{vM}} \frac{\partial \sigma_{vM}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} \right] \\ &= \dot{\gamma} \left[ \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{vM}} + B \delta_{ij} \right] \quad (89) \end{aligned}$$

Die plastische Vergleichsdehnung wird anhand der Vorschrift (45) in der Form

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{vM} - 3 B p}{\sigma_y} \dot{\gamma} \quad (90)$$

berechnet. Unter der Voraussetzung  $\Phi = 0$  während des plastischen Fließens folgt mit (87) aus (90)

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{vM} - 3 B p}{\sigma_{vM} - 3 A p} \dot{\gamma} \quad (91)$$

Der plastische Multiplikator  $\dot{\gamma}$  aus (50) erhält unter Verwendung von (87) und (88) die Form

$$\dot{\gamma} = \frac{\left[ \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{vM}} + A \delta_{ij} \right] \left[ C_{ijkl} d_{kl} + l_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} l_{jk} - \sigma_{ij} l_{kk} \right]}{\left[ \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{vM}} + A \delta_{ij} \right] C_{ijkl} \left[ \frac{3}{2} \frac{s_{kl}}{\sigma_{vM}} + B \delta_{kl} \right] + \frac{\sigma_{vM} - 3 B p}{\sigma_{vM} - 3 A p} H(\varepsilon_{eq}^p)} \quad (92)$$

Wird lineare isotrope Elastizität nach Gleichung (29) vorausgesetzt, folgt aus (92)

$$\dot{\gamma} = \frac{\left[ \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_{vM}} + A \delta_{ij} \right] \left[ 2G d_{ij} + \left( K - \frac{2}{3}G \right) d_{kk} \delta_{ij} + l_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} l_{jk} - \sigma_{ij} l_{kk} \right]}{3G + 9ABK + \frac{\sigma_{vM} - 3Bp}{\sigma_{vM} - 3Ap} H(\varepsilon_{eq}^p)}. \quad (93)$$

Der Nenner von Gleichung (93) muss für eine eindeutige Lösung stets positiv sein. Für den plastischen Modul muss daher

$$H > -\frac{3G + 9ABK}{\frac{B}{A} + \frac{\sigma_{vM}}{\sigma_y} \left( 1 - \frac{B}{A} \right)} = H_{min} \quad (94)$$

gelten. Die elastischen Modellparameter  $G$  und  $K$ , sowie die plastischen Modellparameter  $A$ ,  $B$  und  $\sigma_y$  sind positiv. Die VON MISES Vergleichsspannung ist eine Zustandsgröße und kann Werte im Bereich  $0 \leq \sigma_{vM} \leq \infty$  annehmen. Ausgehend von dem ungünstigsten Fall  $\lim_{\sigma_{vM} \rightarrow \infty} H_{min} = 0 < H$  ist immer eine Verfestigung nötig, damit  $\dot{\gamma} \geq 0$  erfüllt wird. Lediglich bei assoziiertem Fließen ( $A = B$ ) verschwindet die Abhängigkeit von  $\sigma_{vM}$  in (94) und es ist eine Entfestigung mit der Bedingung  $H > -(3G + 9A^2K)$  zulässig.

Eine weitere Einschränkung folgt aus der Zuwachsbedingung der mechanischen Dissipation (57) nach Einsetzen von (89)

$$[\sigma_{vM} - 3Bp] \dot{\gamma} \geq 0. \quad (95)$$

Der plastische Multiplikator  $\dot{\gamma}$  und die Vergleichsspannung  $\sigma_{vM}$  sind stets positiv. Der hydrostatische Druck hat den Gültigkeitsbereich  $-\infty < p < \infty$ . Infolgedessen muss  $B = 0$  gelten, damit (95) erfüllt ist und das Stoffgesetz thermodynamisch zulässig ist. Dies hat zur Folge, dass lediglich plastische Gestaltänderung eintreten, da aus (89) ( $d_{kk}^p = 0$ ) folgt. Mit der Einschränkung  $B = 0$  wird in dieser Arbeit der plastische Modul  $H$  anhand von

$$H = \max \left( \bar{H}, -0,95 \cdot 3G \frac{\sigma_y}{\sigma_{vM}} \right) \quad (96)$$

ermittelt. Der Parameter  $\bar{H}$  stellt den Wunschwert des plastischen Moduls dar, der verwendet wird, solange Bedingung (94) nicht verletzt wird. Details zur numerischen Implementierung des Fließgesetzes sind in Anhang A.2 beschrieben.

Die Bruchbedingung für das Materialmodell ist an die Umsetzung in PAMCRASH (41) angelehnt. Mit dem Triaxialitätsfaktor

$$\eta = \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_{vM}} \quad (97)$$

werden die Spannungszustände unterschieden. Die Bruchdehnung  $\varepsilon^B(\eta)$  ist eine Funktion des Spannungszustandes. Die Bruchbedingung von KOLMOGOROV (32)

$$F = \int \frac{d\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon^B(\eta)} \approx \sum \frac{\Delta\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon^B(\eta)} = 1 \quad (98)$$

gewichtet jedes plastische Dehnungsinkrement mit der zum aktuellen Spannungszustand gehörigen Bruchdehnung.

### Parameteridentifikation

Die elastischen Parameter werden anhand der initialen Anstiege der Spannungskurven in den Abbildungen [12], [13] und [20] ermittelt.

Der Parameter  $A$  in der Fließbedingung (87) wird aus der Steigung des linearen Zusammenhangs im  $\sigma_{vM}/p$ -Diagramm aus Abbildung [22] bestimmt. Aus dem Anstieg zwischen den Werten für Zug und Druck in Abbildung [22] folgt

$$A = \frac{\sigma_{vM}^{Druck} - \sigma_{vM}^{Zug}}{p^{Druck} - p^{Zug}} = 0,12 \quad . \quad (99)$$

Aufgrund der thermodynamischen Zulässigkeit muss in dem plastischen Potential (88)  $B = 0$  gesetzt werden. Die skalaren Materialparameter sind in Tabelle 2 zusammengetragen.

Tabelle 2: Elastische und plastische Materialparameter für das Epoxidharzmodell

$E$ GPa	$\nu$ -	$G$ GPa	$A$ -	$B$ -
3,200	0,400	1,143	0,1200	0,000

Die Fließspannung  $\sigma_y (\varepsilon_{eq}^{pl})$  wird mit einer multilinearen Funktion beschrieben. Zur Ermittlung der Fließspannung muss die Fließbedingung (87) zu  $\Phi = 0$  gesetzt werden, woraus

$$\sigma_y = \sigma_{vM} - 3 A p \quad (100)$$

folgt. Die Dissipationsleistung (44) und (100) liefern die plastische Vergleichsdehnung in der Form

$$\int d\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{eq}^p = \int \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{vM} - 3 A p} d\varepsilon_{ij}^p \quad . \quad (101)$$

Für den einachsigen Zug/Druck-Spannungszustand folgt aus (100)

$$\sigma_y|_{\text{Zug/Druck}} = [1 + \text{sign}(\sigma) A] |\sigma| \quad (102)$$

und aus (101)

$$\varepsilon_{eq}^p|_{\text{Zug/Druck}} = \frac{|\varepsilon^p|}{1 + \text{sign}(\sigma) A} \quad . \quad (103)$$

Im Falle von reinem Schub erhalten (100) und (101) die Form

$$\sigma_y|_{\text{Schub}} = \sqrt{3} \tau \quad (104)$$

und

$$\varepsilon_{eq}^p|_{\text{Schub}} = \frac{\gamma^p}{\sqrt{3}} \quad . \quad (105)$$

Die aus den Daten der Abbildungen [12], [16] und [20] berechneten Fließspannungsverläufe  $\sigma_y(\varepsilon_{eq}^p)$  für Zug, Druck und Schub sind in Abbildung [23] zusammen mit den zwei Fließkurven FK1 und FK2 dargestellt. Fließkurve FK1 entspricht einem aus dem Druckversuch ermittelten Fließspannungsverlauf. Um die dabei auftretende Entfestigung zu verhindern, folgt Fließkurve FK2 dem Verfestigungsbereich eines Druckversuchs und ist ab dem Punkt der Entfestigung horizontal verlängert.

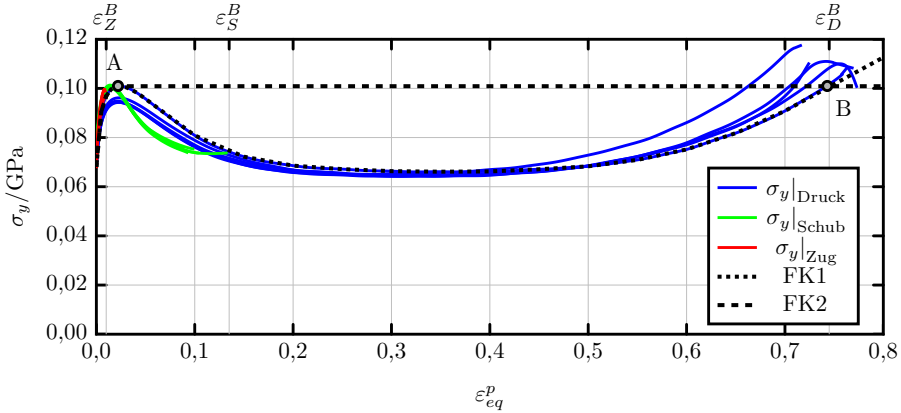


Abbildung 23: Fließspannungsverlauf abgeleitet aus Zug-, Druck- und Schubversuchen, sowie Fließkurven FK1 und FK2 und Bruchdehnungen  $\varepsilon_Z^B$ ,  $\varepsilon_S^B$  und  $\varepsilon_D^B$  für das Epoxidharzmodell

Abbildung [24] zeigt die drei Bruchkurven BK1 bis BK3, anhand der über dem Triaxialitätsfaktor  $\eta$  aufgetragenen Bruchdehnung  $\varepsilon^B$ . Die Bruchdehnungen bei Zug- ( $\varepsilon_Z^B$ ), Schub- ( $\varepsilon_S^B$ ) und Druckbeanspruchung ( $\varepsilon_D^B$ ) der Bruchkurve BK1 entsprechen den Werten aus Abbildung [23]. Bei der Bruchkurve BK2 ist gegenüber der Bruchkurve BK1 die Bruchdehnung unter Schubbeanspruchung erhöht. Mit der Bruchkurve BK3 wird gegenüber der Bruchkurve BK2 die Bruchdehnung unter Zugbeanspruchung aus [81] verwendet.

Die Modifikationen der Fließ- und Bruchkurven FK1, FK2 und BK1, BK2 werden im Folgenden anhand von Simulationen der Epoxidharzversuche in drei Fällen untersucht. Zur Bewertung der einzelnen Fälle dienen in Abbildung [25] die  $F/s$ - und  $M_T/\theta$ -Diagramme sowie die Darstellungen der Proben beim Bruch in Abbildung [26]. In den Abbildungen [25] und [26] werden jeweils Experiment und Simulation verglichen. Bruchkurve BK3 ist für den Einsatz in Mikrostrukturen konzipiert. Deshalb wird in diesem Abschnitt lediglich die Motivation und Hypothese dargelegt und in Abschnitt 4.3 folgt die Anwendung und der Vergleich mit einem Experiment.

#### Fall 1: FK1-BK1

Fließkurve FK1 entspricht dem Fließkurvenverlauf eines experimentellen Druckver-

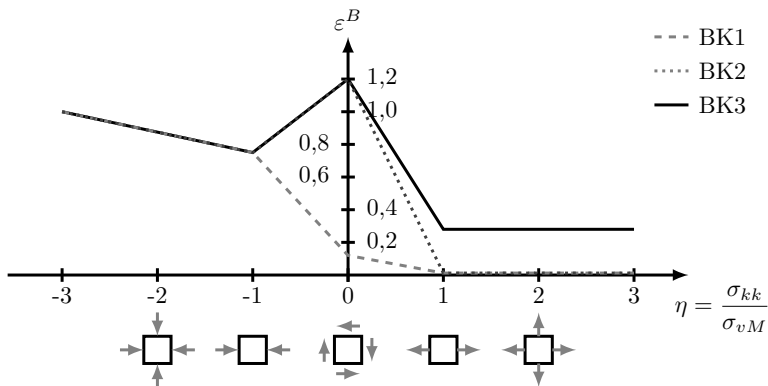


Abbildung 24: Bruchdehnung des Epoxidharzes abhängig vom Spannungszustand

suchs aus Abbildung 23. Auch die Bruchdehnungen der Bruchkurve BK1 sind den gemessenen Daten aus Abbildung 23 entnommen.

Abbildung 25 zeigt, dass die experimentelle  $F/s$ -Kurve des Zugversuchs gut von dem Simulationsmodell bis zum Bruch abgebildet wird. Auch das Simulationsmodell des Torsionsversuchs zeigt eine gute Übereinstimmung im  $M_T/\theta$ -Diagramm bis zu dem Punkt der Entfestigung. An diesem Punkt wird das Versagen von dem Modell zu früh prognostiziert. Im Druckversuch bildet das Modell die Entfestigung im  $F/s$ -Diagramm ab, jedoch setzt auch hier der Bruch zu früh ein.

Die Simulationsmodelle beim Bruch zeigen in Abbildung 26 unter Zuglast ein realistisches Verhalten, unter Torsionslast entsteht ein um  $45^\circ$  gedrehter Bruchwinkel im Vergleich zum Experiment und unter Drucklast ist ein zu frühes Versagen erkennbar.

#### Fall 2: FK1 BK2

Um die geringe Bruchdehnung im Torsionsversuch aus Fall 1 auszugleichen wird die Bruchdehnung  $\varepsilon_S^B$  von Bruchkurve BK2 gegenüber Bruchkurve BK1 angehoben.

Abbildung 25 zeigt, dass das Modell des Zugversuchs nicht von dieser Parameteränderung beeinflusst wird. Das Modell des Torsionsversuchs zeigt mehrere sprunghafte Entfestigungen im  $M_T/\theta$ -Diagramm. Die Begründung für das instabile Verhalten liefert ein unter reinem Schub belastetes Element, dass bei ansteigender, äußeren Last der Fließkurve FK1 in Abbildung 23 bis zum Punkt A folgt. Eine Erhöhung der äußeren Last an diesem Punkt kann nur mit der Zunahme der Fließspannung  $\sigma_y$  ausgeglichen werden. Die Zunahme der Fließspannung erfolgt erst bei Punkt B in Abbildung 23. Diese sprunghafte Dehnungszunahme sorgt für die Entlastung angrenzender Elemente und somit auch für den Sprung in dem Momentenverlauf. In dem Modell springen nacheinander neue Elementreihen in den Dehnungszustand bei Punkt B und es entsteht das „Sägezahnmuster“ im  $M_T/\theta$ -Diagramm. Das Modell des Druckversuchs zeigt im  $F/s$ -Diagramm nicht die sprunghafte Entfestigung. Bei

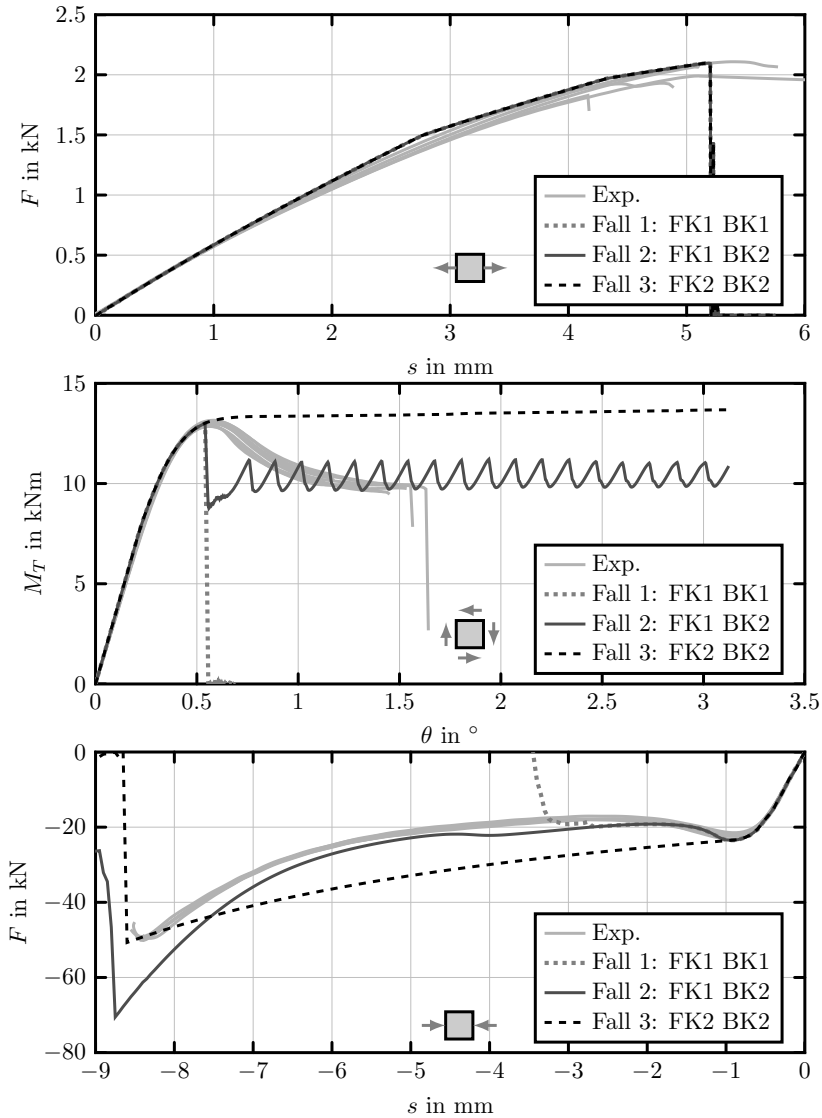


Abbildung 25: Vergleich zwischen Epoxidharzexperimenten und Simulationen mit unterschiedlichen Fließ- und Bruchkurven unter Zug- (oben), Schub- (mitte) und Drucklast (unten)

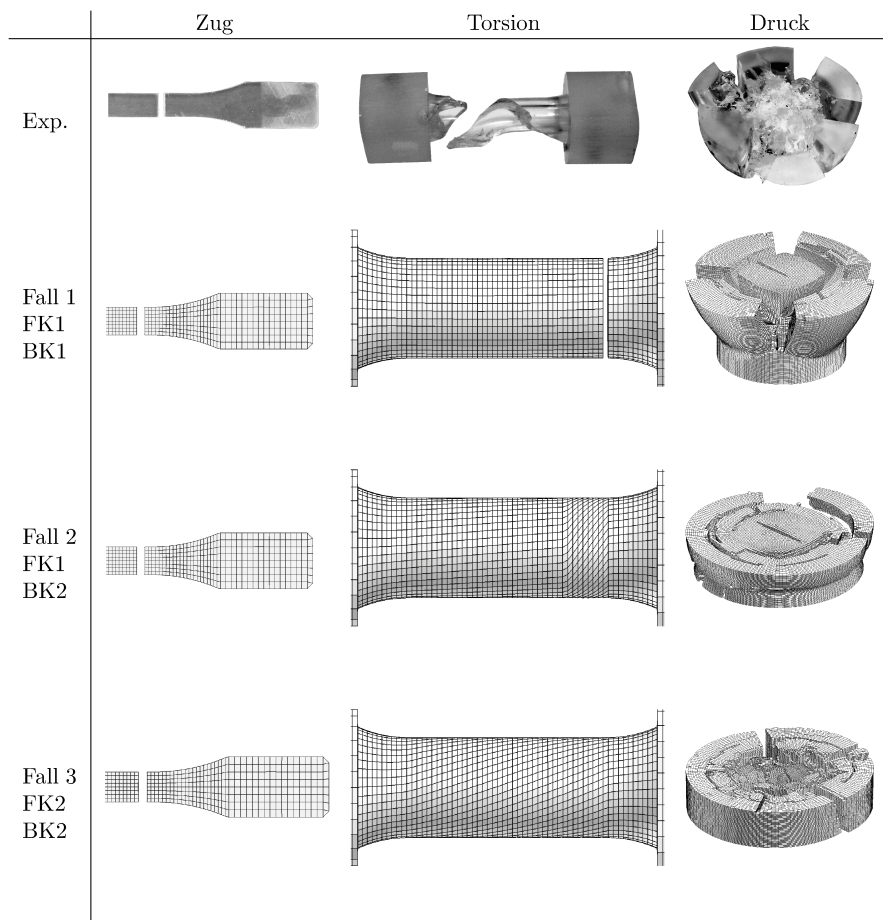


Abbildung 26: Epoxidharzproben bei Bruch – Vergleich zwischen Experiment und Simulation im Fall 1, 2 und 3

zunehmender Stauchung der Probe vergrößert sich die Wirkfläche der Druckkraft. Dieser Effekt sorgt für eine Stabilisierung der Druckkraft  $F = \sigma A$  bei entfestigendem Fließverhalten. Die Bruchdehnung des Druckversuchs wird mit diesem Modell deutlich besser abgebildet.

Das Zugmodell bei Bruch zeigt in Abbildung 26 (3. Reihe) keine Änderung gegenüber Fall 1 (2. Reihe). An dem Torsionsmodell ist deutlich das instabile Materialverhalten anhand der Lokalisierung zu sehen. Weitere Erkenntnisse folgen aus dem Vergleich des Torsionsmodells in Abbildung 26 (3. Reihe) mit dem verformten Bild des experimentellen Torsionsversuchs in Abbildung 21 (C). In dem Bereich der Lokalisierung zeigt das Experiment eine Änderung der äußeren Kontur, wohingegen die äußere Kontur des Simulationsmodells erhalten bleibt. Die Konturänderung lässt auf eine Veränderung des Spannungszustandes in diesem Bereich schließen. Dieser Effekt wird nicht von dem Simulationsmodell abgebildet und eine realistische Modellierung des Bruchs ist somit nicht möglich. In dem Druckmodell beim Bruch sind die Zugrisse in Umfangsrichtung zu erkennen, jedoch wird der zerklüftete Bereich in der Probenmitte nicht abgebildet.

#### Fall 3: FK2 BK2

Zur Vermeidung des instabilen Materialverhaltens im Schublastfall wird in der Fließkurve FK2 gegenüber der Fließkurve FK1 keine Entfestigung zugelassen.

Abbildung 25 zeigt, dass das Zugmodell von dieser Modifikation nicht beeinflusst wird, da der Bruch in diesem Lastfall vor der Entfestigungs der Fließkurve einsetzt. Das entfestigende Modellverhalten wird im Torsionslastfall vermieden und der Bruch kann aufgrund der hohen Bruchdehnung  $\varepsilon_S^B$  auch mit diesem Modell nicht beschrieben werden. Das Druckmodell zeigt ebenfalls keine Entfestigung mehr aber die Bruchdehnung wird mit diesem Modell immer noch gut abgebildet.

Das Zugmodell beim Bruch zeigt in Abbildung 26 keine Änderung im Vergleich zu Fall 1 und 2. An dem Torsionsmodell ist keine Lokalisierung mehr zu erkennen. Das Druckmodell beim Bruch von Fall 3 zeigt ein realistischeres Bruchverhalten in der Probenmitte gegenüber dem von Fall 2.

#### BK3:

Bei Bruchkurve BK3 wird gegenüber Bruchkurve BK2 die Bruchdehnung  $\varepsilon_Z^B$  von Gleichung (81) angenommen. Die Bruchdehnung basiert auf Abbildung 24 mit dem Bruchbild der Zugprobe mit  $v \approx 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ . Diese Annahme beruht auf der Hypothese, dass die Bruchdehnung in der plastischen Einflusszone bei allen Dehnungsgeschwindigkeiten gleich ist und lediglich die Größe der Zone variiert. Die plastische Einflusszone beim Zugversuch mit  $v = 10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  weist eine Länge von etwa 0,2 mm auf. In faserverstärkten Mikrostrukturen sind kleinere Abstände als 0,2 mm zwischen den Filamenten aufzufinden. Deshalb wird mit Bruchkurve BK3 das Versagen von Mikromodellen abgebildet werden und eine Validierung an den Makrostrukturen der Epoxidharzversuche ist nicht zielführend. Die Beurteilung dieser Bruchkurve findet in Abschnitt 4.3 statt.



### 3.2.3 Beurteilung des Materialmodells in einer skalierten Mikroumgebung

Eine Beurteilung des Fließ- und Bruchverhaltens des Matrixmodells erfolgt an zwei skalierten Mikroproben. Ein Vorteil dieser skalierten Strukturen ist die Möglichkeit die Vorgänge im Epoxidharz während des Experiments beobachten zu können. Des Weiteren werden Größeneffekte gegenüber einer unskalierten Mikrostruktur vermieden, die aufgrund des Skalenübergangs auftreten. Zur experimentellen Verifizierung dienen die in Abbildung 27 dargestellten Epoxidharzwürfel mit den parallel angeordneten Stahleinlegern, welche die Filamente repräsentieren sollen.

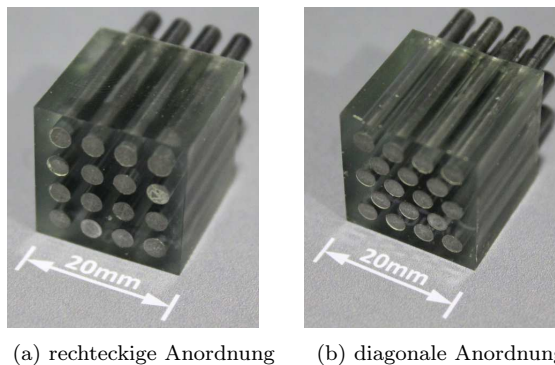


Abbildung 27: Geometrie der skalierten Mikroproben

Die Epoxidharzwürfel haben eine Kantenlänge von 20 mm und die Stahleinleger einen Durchmesser von 3 mm. Die Oberfläche von den Stahleinlegern wurde vor dem Gießprozess mit Trennmittel beaufschlagt, so dass keine Haftung zwischen den Stahleinlegern und der Matrix entsteht. In der Simulation kann die Grenzfläche mit einem Kontaktinterface abgebildet werden. Die rechteckige Filamentanordnung in Abbildung 27a und die diagonale Anordnung in Abbildung 27b stellen den Grenzbereich möglicher Anordnungen in Faserverbundstrukturen dar.

Die Druckbelastung der skalierten Mikroproben erfolgt senkrecht zu den Filamenten mit einer Druckstempelgeschwindigkeit von  $100 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ , um einen Zwischenfaserbruch zu erzeugen. Zur Minimierung der Reibung sind die Druckplatten der Prüfmaschine poliert. Die grauen Bereiche in Abbildung 28 stellen die Messdaten der jeweils 8 Druckversuche im  $F/s$ -Diagramm dar. Diese werden mit jeweils zwei Simulationsmodellen verglichen. Die konstitutive Modellierung des Epoxidharzes erfolgt gemäß den Fließ- und Bruchkurven aus Fall 2 (FK1-BK2) und Fall 3 (FK2-BK2). Die Bruchkurve BK1 ist nicht Gegenstand dieser Untersuchung, da diese in dem Simulationsmodell der Reinharzproben einen frühzeitigen Bruch aufgezeigt hat. Die Bruchkurve BK3 ist für den Einsatz in Mikromodellen gedacht, da die Bruchdehnung für den Zuglastfall aus der plastischen Zone der Bruchfläche ermittelt wurde, die kleiner als die verwendete Elementierung ist. In Abbildung 28 zeigt die Simulation mit den Fließ- und Bruchkurven aus Fall 2 ein realistisches Fließ- und Bruchverhalten. Mit den den Fließ- und

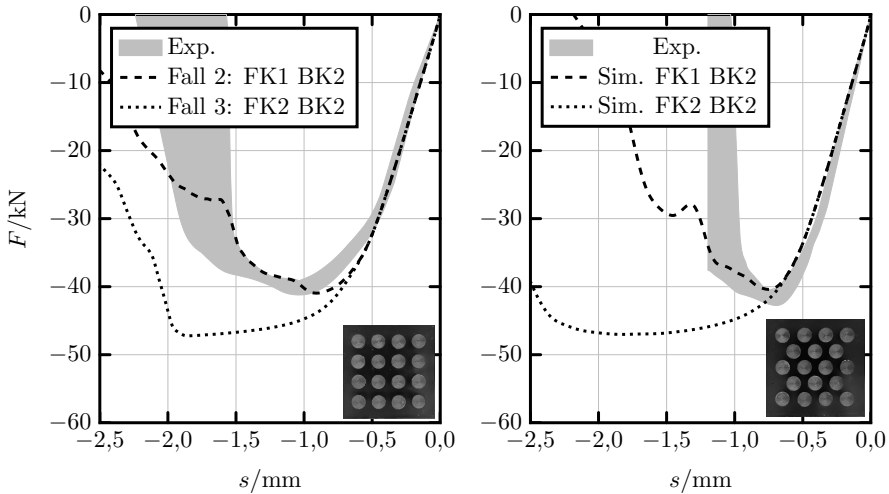


Abbildung 28: Vergleich zwischen Experiment und Simulation in einem skalierten Mikromodell mit: (links) rechteckiger Anordnung und (rechts) diagonaler Anordnung

Bruchkurven aus Fall 3 wird ein höheres Kraftniveau als im Experiment erreicht und es kommt zu einer geringeren Lokalisierung der plastischen Dehnungen. Dies hat zur Folge, dass auch der Bruch bei dem Modell mit der Fließkurve FK2 später einsetzt. In diesem Vergleich ist erkennbar, dass das entfestigende Fließverhalten der Matrix in makroskopischen Strukturen einen bedeutenden Einfluss hat, um das Fließ- und Bruchverhalten realistisch abzubilden.

Abbildung 29 stellt die skalierten Mikrostrukturen bei Bruch aus dem Experiment der Simulation gegenüber. Ausgewählte Prüfkörper wurden mit einem kontrastreichen Sprühnebel auf der Vorderseite benetzt. Damit ist es möglich das zweidimensionale Dehnungsfeld auf der Sichtfläche mittels der Software ARAMIS [9] zu bestimmen. Die Abbildungen 29a und 29c zeigen das logarithmische Vergleichsdehnungsfeld auf den Proben mit rechteckiger und diagonaler Anordnung. Zur Bestimmung der logarithmischen Vergleichsdehnung muss von Volumenkonstanz ausgegangen werden, da die Dehnung senkrecht zur Oberfläche nicht ermittelt werden kann. In den Abbildungen 29b und 29d sind die Bruchbilder der Modelle mit Fließkurve FK1 dargestellt. Der Konturplot zeigt die plastische Vergleichsdehnung. Somit ist ein qualitativer Vergleich der Scherbänder zwischen Experiment und Simulation möglich.

In der Struktur mit der rechteckigen Anordnung der Stahleinleger bilden sich lokale Scherbänder zwischen jeweils zwei Filamenten. Es entstehen viele einzelne Zugrisse, bevor die Struktur endgültig versagt. Dieser Effekt wird sehr gut mit dem Simulati-

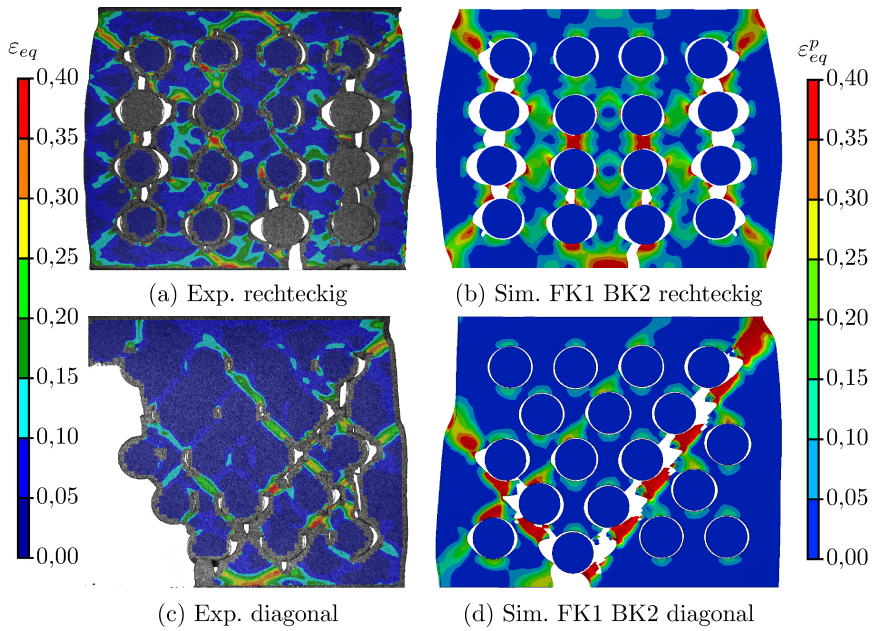


Abbildung 29: Bruchvorgang an zwei skalierten Mikroproben im Vergleich zwischen Experiment und Simulation

onsmodell abgebildet. Die diagonale Anordnung zeigt im Experiment mehrere globale Scherbänder. An zwei dieser Scherbänder gleitet die Struktur beim Bruch ab. In der Simulation prägen sich diese beiden Scherbänder deutlicher als im Experiment aus. Die Bruchfläche wird jedoch richtig prognostiziert.

Mit der Gegenüberstellung der Ergebnisse aus Experiment und Simulation konnte gezeigt werden, dass das Fließ- und Bruchverhalten makroskopischer Strukturen mit Fließkurve FK1 und Bruchkurve BK2 realistisch abgebildet werden kann.

## 4 Bruchkurvenprognose mittels Mikromodelle

### 4.1 Kohäsivzonenmodell

Die Mikrostrukturen werden mit einem Voxelnetz modelliert. Die Abbildung 30 zeigt schematisch das Voxelnetz eines Filamentausschnitts mit umliegenden Matrixmaterial. Ein Vorteil einer solchen Vernetzung ist die gleichmäßige Elementgeometrie im Ausgangszustand. Des Weiteren können komplexe Geometrien mit einfachen Algorithmen vernetzt werden.

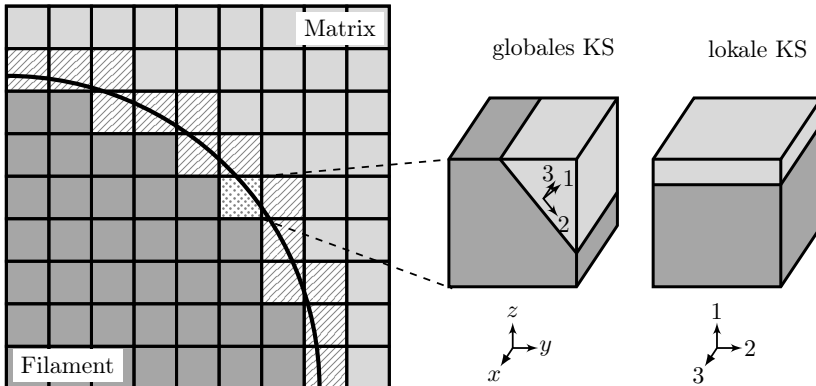


Abbildung 30: Kohäsivzonenelement in einem Voxelnetz

In Abbildung 30 ist zu erkennen, dass die meisten Elemente direkt dem Filament oder der Matrix zugeordnet werden können. Andere Elemente auf der Filament/Matrix Grenzfläche beinhalten beide Materialien, sowie die Grenzfläche selbst (Abbildung 30 mitte). Eine Aufspaltung eines solchen Elements entlang der Grenzfläche, in die beiden Bestandteile ist nicht praktikabel, da mit diesem Verfahren Elemente mit sehr kleinen Kantenlängen entstehen. In einem Algorithmus mit expliziter Zeitintegration sorgen diese kleinen Kantenlängen für einen kleinen Zeitschritt und die Rechenzeit steigt enorm an. Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung dieses Kohäsivzonenelements stellt die von MOËS und BELYTSCHKO [20, 2] entwickelte *extended finite element method* (XFEM) dar. Mit dieser Methode können beliebige Diskontinuitäten wie der Steifigkeitssprung an der Grenzfläche modelliert werden. Die Anwendung der XFEM auf diese Problemstellung ist in einigen Veröffentlichungen von KÄSTNER [16, 15, 17] zu finden.

In dieser Arbeit wird ein vereinfachter Ansatz verwendet. Es werden mittels einer analytischen Homogenisierung die elastischen Konstanten der inneren Struktur bestimmt. Aufgrund des elementspezifischen Faservolumengehalts  $\phi$  muss die Homogenisierung für jedes einzelne Kohäsivzonenelement durchgeführt werden. Dafür werden die Spannungen und Dehnungen des Elements in ein lokales Koordinatensystem (KS)

transformiert. Abbildung 30 zeigt auf der rechten Seite das Element im lokalen KS, so dass der Normalenvektor der Grenzfläche in Richtung 1 zeigt. Mit dem auf Filament- und Matrixmaterial bezogenen HOOKEschen Gesetz (25) für kleine Verformungen

$$\boldsymbol{\sigma}^f = {}^{(4)}\mathbf{C}^f : \boldsymbol{\varepsilon}^f \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}^m = {}^{(4)}\mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (106)$$

sowie den Zwangsbedingungen aus Tabelle 3 sind die Bestimmungsgleichungen der effektiven elastischen Konstanten beschrieben. Diese Methode entspricht der Herleitung der Mischungsregel ?? mit Ausnahme der auf die Kohäsivzone angepassten Randbedingungen.

Tabelle 3: Zwangsbedingungen im Kohäsivzonenelement zur Bestimmung der homogenisierten, elastischen Konstanten

	ij=11	ij=22	ij=33
$\varepsilon_{ij} =$	$\phi \varepsilon_{11}^f + (1 - \phi) \varepsilon_{11}^m$	$\varepsilon_{22}^f = \varepsilon_{22}^m$	$\varepsilon_{33}^f = \varepsilon_{33}^m$
$\sigma_{ij} =$	$\sigma_{11}^f = \sigma_{11}^m$	$\phi \sigma_{22}^f + (1 - \phi) \sigma_{22}^m$	$\phi \sigma_{33}^f + (1 - \phi) \sigma_{33}^m$
	ij=12	ij=23	ij=13
$\varepsilon_{ij} =$	$\phi \varepsilon_{12}^f + (1 - \phi) \varepsilon_{12}^m$	$\varepsilon_{23}^f = \varepsilon_{23}^m$	$\varepsilon_{13}^f = \varepsilon_{13}^m$
$\sigma_{ij} =$	$\sigma_{12}^f = \sigma_{12}^m$	$\phi \sigma_{23}^f + (1 - \phi) \sigma_{23}^m$	$\phi \sigma_{13}^f + (1 - \phi) \sigma_{13}^m$

Der YOUNGSche Modul in 1 Richtung erhält die Form

$$E_{11} = \left[ \frac{\phi}{E_f} + \frac{(1 - \phi)}{E_m} - K_E \frac{\phi (1 - \phi)}{\phi (1 - \nu_m) E_f + (1 - \phi) (1 - \nu_f) E_m} \right]^{-1} \quad , \quad (107)$$

mit dem konstanten Faktor

$$K_E = 2 \frac{(E_m \nu_f - E_f \nu_m)^2}{E_f E_m} \quad . \quad (108)$$

In 2 und 3 Richtung folgt für die YOUNGSchen Module der Zusammenhang

$$E_{22} = E_{33} = \frac{[\phi E_f + (1 - \phi) E_m]^2 - [\phi E_f \nu_m + (1 - \phi) E_m \nu_f]^2}{[\phi E_f + (1 - \phi) E_m] - [\phi E_f \nu_m^2 + (1 - \phi) E_m \nu_f^2]} \quad . \quad (109)$$

Unter Vernachlässigung der Querkontraktion reduziert sich (109) zu

$$E_{22} = E_{33} \approx \phi E_f + (1 - \phi) E_m \quad . \quad (110)$$

Im Zusammenhang mit den verwendeten Epoxidharz- und Glasfasermaterial liegt die maximale Abweichung zwischen (109) und (110) unter einem Prozent. Für die effektiven Poisson Zahlen folgen

$$\nu_{12} = \nu_{13} = E_{22} \frac{\phi \nu_f + (1 - \phi) \nu_m - \nu_f \nu_m}{\phi E_f (1 - \nu_m) + (1 - \phi) E_m (1 - \nu_f)} \quad , \quad (111)$$

$$\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{12} \frac{E_{11}}{E_{22}} \quad (112)$$

und

$$\nu_{23} = \nu_{32} = \frac{\phi E_f (1 - \nu_m^2) \nu_f + (1 - \phi) E_m (1 - \nu_f^2) \nu_m}{\phi E_f (1 - \nu_m^2) + (1 - \phi) E_m (1 - \nu_f^2)} \quad (113)$$

Die effektiven Schubmoduln erhalten die Form

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_m G_f}{\phi G_m + (1 - \phi) G_f} \quad (114)$$

und

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1 + \nu_{23})} \quad (115)$$

An den effektiven elastischen Konstanten ist erkennbar, dass das homogenisierte Kohäsivzonenmodell eine transversal isotrope Elastizität besitzt. Zur Versagensmodellierung der Filament/Matrix-Grenzfläche wird das Kohäsivzonenmodell noch mit einem Schädigungsmodell erweitert. Es wird angenommen, dass lediglich Risse auf der Grenzfläche entstehen. Der mit der Schädigungsvariable  $D$  geschädigte Elastizitätstensor erhält somit in VOIGT-Notation die Form

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} (1-D) \frac{(1-\nu_{23})}{\square} E_{11} & (1-D) \frac{\nu_{12}}{\square} E_{22} & (1-D) \frac{\nu_{12}}{\square} E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ (1-D) \frac{\nu_{12}}{\square} E_{22} & \frac{(1-\nu_{12} \nu_{21})}{(1+\nu_{23})\square} E_{22} & \frac{(\nu_{23}+\nu_{12} \nu_{21})}{(1+\nu_{23})\square} E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ (1-D) \frac{\nu_{12}}{\square} E_{22} & \frac{(\nu_{23}+\nu_{12} \nu_{21})}{(1+\nu_{23})\square} E_{22} & \frac{(1-\nu_{12} \nu_{21})}{(1+\nu_{23})\square} E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \quad (116)$$

mit

$$\square = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \quad (117)$$

Das nichtlineare Verhalten der Kohäsivzone und das Gleiten zwischen Matrix und Filament nach dem Kohäsivzonenbruch wird vereinfacht einem Schädigungsmodell abgebildet. Der Schädigungsbeginn wird mit dem Versagenkriterium

$$F_V = 1 = \begin{cases} \frac{\sigma_{11}^2}{R_D^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{R_S^2}, & \text{wenn } \sigma_{11} \geq 0, \\ \frac{\sigma_{11}^2}{R_D^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{R_S^2}, & \text{wenn } \sigma_{11} < 0 \end{cases} \quad (118)$$

anhand der Spannungen  $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$  auf der Bruchfläche beschrieben. Da das Materialmodell des Kohäsivzonenelements nicht das plastische Fließverhalten der Matrix berücksichtigt, wird in (118) auch eine Schädigung bei auftretender Druckspannung ( $\sigma_{11} < 0$ ) zugelassen. Damit soll das nichtlineare Verhalten der Matrix näherungsweise

abgebildet werden. Während der fortschreitenden Schädigung werden die Spannungen auf der Bruchfläche konstant gehalten. Der Bruch des Elements wird mit dem Bruchkriterium

$$F_B = \frac{\varepsilon_{11}^2}{\varepsilon_B^2} + \frac{\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2}{\gamma_B^2} \quad (119)$$

beschrieben.

## 4.2 Druckversuch am unidirektional verstärkten FKV-Prüfkörper

Als Bewertungsgrundlage nachfolgender mikromechanischer Untersuchungen dient das Experiment von FKV-Prüfkörpern unter einachsiger Drucklast. Die Probekörper bestehen aus den Materialien E-Glasfaser (Abschnitt 3.1) und Epoxidharz (Abschnitt 3.2) und sind am Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik in Dresden hergestellt worden. Der Herstellungsprozess ist schematisch in Abbildung 31 dargestellt.

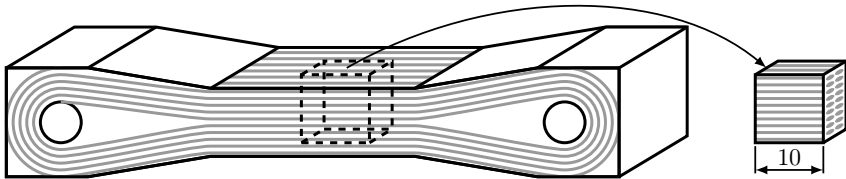


Abbildung 31: Herstellungsprozess von unidirektional verstärkten FKV-Prüfkörper

Eine Endlosfaser wird mehrfach um zwei Bolzen gewickelt und anschließend in eine Form mit der in Abbildung 31 dargestellten Geometrie geschoben. Nach der Harzinfusion und dem Aushärten des Epoxidharzes folgt die Probenentnahme aus dem mittleren Bereich mit paralleler Fasernordnung. In dem Entnahmebereich ist der Faservolumengehalt von  $\phi \approx 0,6$  optisch ermittelt worden.

Die einachsige Druckbelastung der Prüfkörper erfolgt quer zur Faserrichtung bis zum Bruch. Abbildung 32 zeigt schematisch den Belastungszustand und das dazugehörige  $\sigma_{\perp}/\varepsilon_{\perp}$ -Diagramm. Die betragsmäßig größte Spannung von ca.  $\sigma_{\perp}^{\max} \approx 0,16$  GPa entspricht der Quer-Druckfestigkeit  $R_{\perp}^{(-)} = \sigma_{\perp}^{\max}$ . Dieser Wert für  $R_{\perp}^{(-)}$  passt in den von PUCK [22] beobachteten Bereich von  $0,12 \text{ GPa} < R_{\perp}^{(-)} < 0,24 \text{ GPa}$  für Glasfaser Epoxidharz Verbunde.

Abbildung 33 zeigt den Bruchvorgang der in Abbildung 32 ausgewählten FKV-Probe. In Abbildung 33a ist die Probe kurz vor dem Bruch dargestellt. Die rautenförmige Schattierung auf dem Prüfkörper verdeutlicht, dass vor dem Bruch viele Mikrorisse entstehen. Abbildung 33b zeigt den finalen Bruch unter  $\theta_B = 54^\circ$ . Der ermittelte Bruchwinkel stimmt mit dem beobachteten Bereich  $50^\circ \leq \theta_B \leq 55^\circ$  von PUCK [23] überein. In Abbildung 33c sind zwei gegenüberliegende Bruchkanten der Abbildung 33b als Detailaufnahme dargestellt.

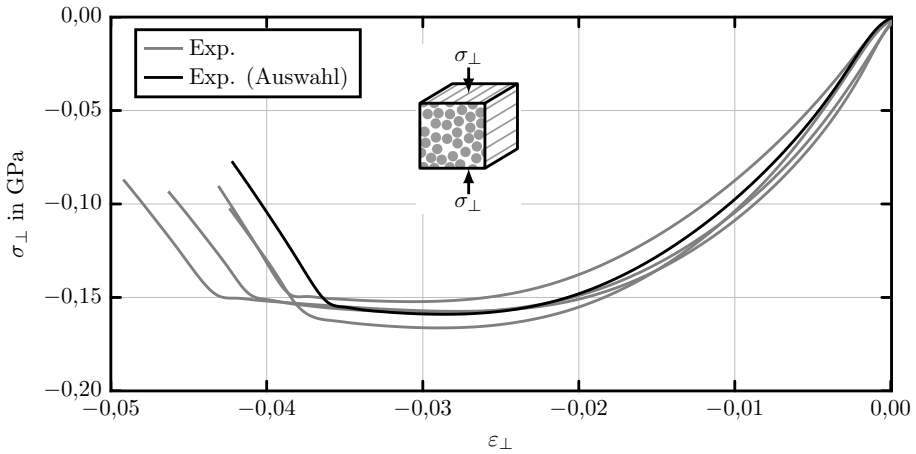


Abbildung 32: Spannungs-/Dehnungsdiagramm von fünf unidirektional verstärkten FKV-Prüfkörper unter einachsiger Drucklast: Das Bruchbild des ausgewählten Prüfkörpers ist in Abbildung 33 dargestellt.

Das Spannungs-/Dehnungsdiagramm, der Bruchwinkel und die Detailaufnahme der Bruchkante dienen als Beurteilungsgrundlagen der nachfolgenden Mikrountersuchungen.

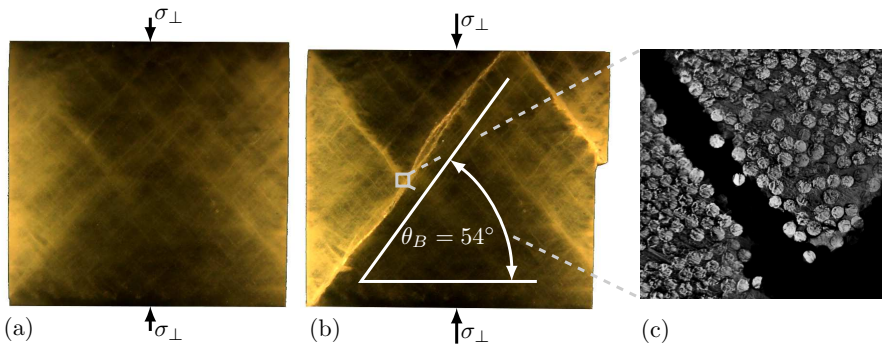


Abbildung 33: Bruchverlauf der in Abbildung 32 hervorgehobenen unidirektional verstärkten FKV-Probe unter einachsiger Drucklast, (a) Schädigung aufgrund Einzelrisse, (b) Bruch unter  $\theta_B = 54^\circ$ , (c) Detailaufnahme zweier gegenüberliegender Bruchkanten



### 4.3 Modellierungsstrategie

#### Repräsentatives Volumenelement und periodische Randbedingungen

Zur Mikromodellierung von Faser-Kunststoff-Verbunde (FKV) werden repräsentative Volumenelemente (RVE) der Gesamtstruktur verwendet, wie in Abbildung 34 dargestellt.

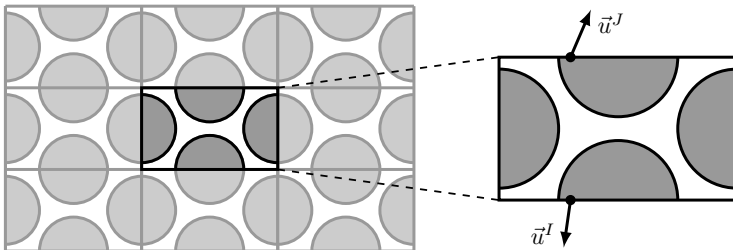


Abbildung 34: Repräsentatives Volumenelement (RVE) mit periodischen Randbedingungen zur Modellierung von FKV

Es wird davon ausgegangen, dass die Gesamtstruktur aus vielen dieser Substrukturen besteht. Der Rechenaufwand wird reduziert, indem nur das mechanische Verhalten des RVEs untersucht wird. In [14] wird dargestellt, dass aufgeprägte lineare Randbedingungen an der Gesamtstruktur nicht auf das RVE übertragen werden können, wenn das RVE einen Ausschnitt der Gesamtstruktur wie in Abbildung 34 darstellen soll. Die Verschiebungs- und Spannungszustände, die sich an den Rändern des RVEs einstellen, werden mit periodischen Randbedingungen beschrieben. Mit den oberen Indizes  $I$  und  $J$  die zwei gegenüberliegende Punkte symbolisieren, folgt für die periodische Verschiebung

$$\vec{u}^I - \vec{u}^J = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \cdot (\vec{X}^I - \vec{X}^J) \quad (120)$$

und für die antiperiodischen Spannungsvektoren

$$\vec{t}^I = -\vec{t}^J \Leftrightarrow \vec{n}^I \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\vec{n}^J \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (121)$$

an der Oberfläche des RVEs [8]. Die Größen  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  stellen den makroskopischen Deformationsgradienten und den makroskopischen Spannungstensor dar. Der Vektor  $\vec{n}$  beschreibt die Flächennormale an einem Punkt auf dem RVE.

In der Literatur [31, 11, 8, 36, 10] werden RVEs mit unterschiedlicher Filamentanordnung, Dimension, Elementierung und Größe vorgestellt. Um das Versagen vom FKV auf Mikroskala prognostizieren zu können, wird im Folgenden das geeignete RVE anhand von einer Literaturübersicht und eigenen Beispielen bestimmt. Zur Unterscheidung der Dimension werden die Bezeichnungen *3D-RVE* und *2D-RVE* eingeführt. Wird im Folgenden von einem 3D-RVE gesprochen, so entspricht die Länge des RVEs in Filamentrichtung der RVE-Breite. Ein 2D-RVE besitzt die Ausdehnung

einer Elementkantenlänge in Filamentrichtung, da alle folgenden RVEs mit finiten Volumenelementen modelliert werden.

### Filamentanordnung und Dimension des RVEs

Mögliche Filamentanordnungen der RVEs sind schematisch in Abbildung 35 dargestellt. NORTHERN [31] bestimmt anhand von 3D-RVE mit rechteckiger und hexa-

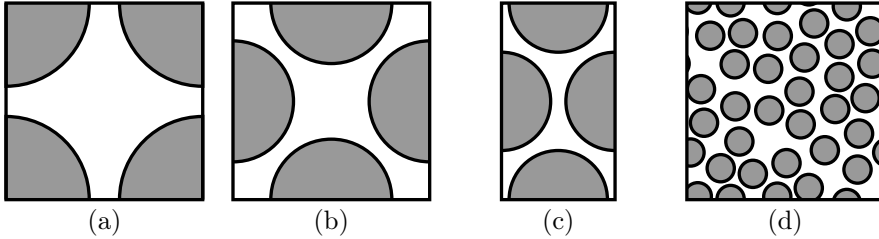


Abbildung 35: Mögliche Filamentanordnungen von RVEs (a) rechteckig (b) diagonal (c) hexagonal (d) zufällig

gonaler Filamentanordnung das elastische Verhalten von FKV. Die Verifizierung mit experimentellen Daten zeigt eine gute Übereinstimmung [31]. Ähnlich gute Ergebnisse erzielt GUSEV [11] mit 2D-RVE mit rechteckiger und hexagonaler Filamentanordnung.

**Erkenntnis 1.** Ein 2D-RVE liefert vergleichbare Ergebnisse wie ein 3D-RVE, jedoch ist der Rechenaufwand gegenüber dem 3D-RVE geringer.

GUSEV [11] untersucht das elastische Verhalten dreier 2D-RVEs mit den Eigenschaften:

**RVE 1** hexagonale Filamentanordnung, Filamente haben denselben Radius

**RVE 2** zufällige Filamentanordnung, Filamente haben denselben Radius

**RVE 3** zufällige Filamentanordnung, Filamente haben unterschiedliche Radien

Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigt, dass RVE 2 die effektiven elastischen Eigenschaften nur geringfügig besser abbildet als RVE 1 [11]. RVE 3 zeigt keine Verbesserung gegenüber RVE 2 [11]. TRIAS [36] stellt in seiner Studie fest, dass lokale Effekte wie das Fließen oder der Matrixbruch nur realistisch mit einer zufälligen Filamentanordnung beschrieben werden.

**Erkenntnis 2.** Da die Untersuchungen dieser Arbeit den Fließ- und Bruchvorgang der Matrix beinhalten, ist eine zufällige Filamentanordnung notwendig.

YANG [43] entwickelte den *random sequential expansion* (RSE) Algorithmus zur Erzeugung der zufällig verteilten Filamentmittelpunkte. Bei einem Faservolumengehalt von  $\phi \geq 0,60$  entstehen unter Verwendung dieses Algorithmus zentrisch zulaufende

Lücken zwischen den Filamenten. Zur Behebung dieser Lücken wird der Algorithmus in dieser Arbeit erweitert. Alle Filamente werden nachträglich zufällig verrückt, wenn dadurch keine Durchdringung mit einem benachbarten Filament entsteht.

### Elementierung des RVEs

In der nachfolgenden Untersuchung wird die Modellierung einer Mikrostruktur mit einem regulären Netz (Abbildung 36a) der Modellierung mit einem Voxelnetz (Abbildung 36b) bei unterschiedlichen Elementkantenlängen gegenübergestellt. Die dargestellten 2D-RVEs in Abbildung 36 haben eine Elementkantenlänge von  $L_E \approx 0,5 \mu\text{m}$  und einen Faservolumengehalt von  $\phi = 0,60$ . Des Weiteren werden Netze mit  $L_E \approx 0,33 \mu\text{m}$  und  $L_E \approx 0,25 \mu\text{m}$  verwendet. Die Filamente werden mit den Parametern aus Tabelle 1 modelliert. Zur Modellierung der Matrix kommen die Parameter aus Tabelle 2, sowie die Fließkurve FK2 und die Bruchkurve BK3 zum Einsatz. Das reguläre Netz bildet eine direkte Anbindung zwischen Filament und Matrix ohne separates Kohäsivzonelement ab. Die Versagensparameter für das Kohäsivzonenmodell in dem Voxelnetz werden der maximalen Fließspannung von FK2 unter uniaxialem Zug, reinem Schub und uniaxialem Druck gemäß Tabelle 4 gleichgesetzt.

Tabelle 4: Versagensparameter des Kohäsivzonelements bei bestmöglicher Haftung zwischen Filament und Matrix

$R_Z$ in GPa	$R_S$ in GPa	$R_D$ in GPa	$\varepsilon_B$	$\gamma_B$
0,089	0,102	0,110	0,5	1,0

Um den Drucklastfall der unidirektional verstärkten FKV-Prüfkörper aus Abschnitt 4.2 zu modellieren, werden an den 2D-RVEs in Abbildung 36 an dem oberen und unteren Rand periodische Verschiebungen und an den restlichen Rändern antiperiodische Krafrandbedingungen zur freien Querkontraktion verwendet. Gemäß 8 werden die gemittelten Dehnungs-  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  und Spannungskordinaten  $\bar{\sigma}_{ij}$  der Einheitszelle in der Form

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (122)$$

und

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (123)$$

berechnet. Abbildung 37 zeigt die Spannungsverläufe der Experimente aus Abbildung 32 im Vergleich zu den 2D-RVE-Simulationen mit unterschiedlichem Netztyp und Netzgröße. Die Spannungsverläufe der Simulationen werden mit (122) und (123) ausgewertet. Der initiale elastische Anstieg aller 2D-RVEs zeigt unabhängig von der Vernetzung keinen sichtbaren Unterschied. Bei zunehmender Dehnung ist ein deutlicher Unterschied im Spannungsverlauf zwischen dem regulären Netz und dem Voxelnetz zu sehen. Dies deutet darauf hin, dass das Kohäsivzonenmodell ein etwas weiches Verhalten zeigt als eine ideale Anbindung zwischen Filament und Matrix. Das Bruchverhalten des regulären Netzes weist eine große Netzabhängigkeit aufgrund

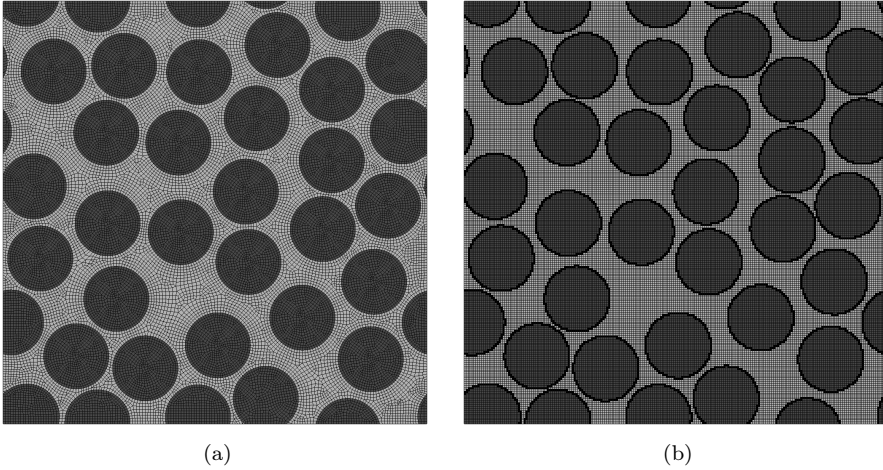


Abbildung 36: Gegenüberstellung der Vernetzungsmethoden mit einer Elementkantenlänge von  $L_E \approx 0,5 \mu\text{m}$  (a) reguläres Netz (b) Voxelnetz

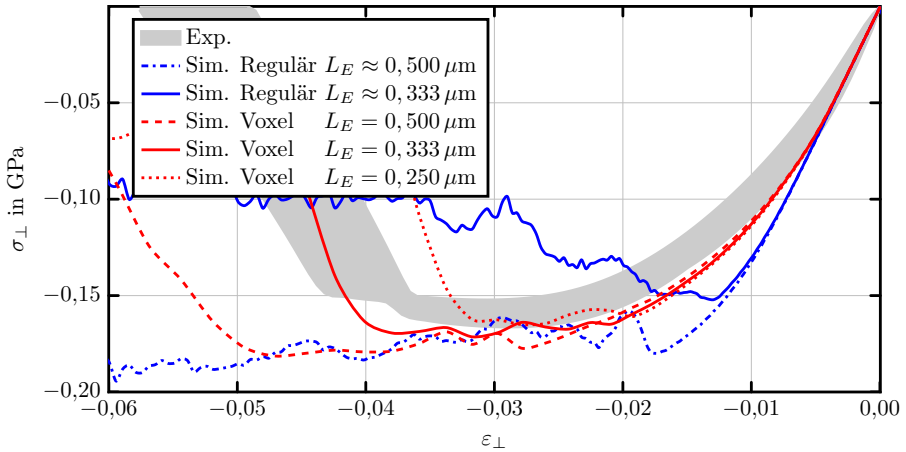


Abbildung 37: Vergleich zwischen regulärem Netz und Voxelnetz mit unterschiedlicher Elementkantenlängen  $L_E$

des Steifigkeitssprungs zwischen Filament und Matrix auf. Bei der Verwendung eines regulären Netzes ist eine Regulierung des Bruchverhaltens in Abhängigkeit der Elementkantenlänge nötig, da in einem Modell Elemente mit verschiedenen Elementkantenlängen auftreten.

**Erkenntnis 3.** Ein Voxelnetz weist lediglich eine Elementkantenlänge auf und eine Regulierung ist nicht erforderlich.

**Erkenntnis 4.** Das Modell mit dem Voxelnetz und einer Elementkantenlänge von  $L_E = 0,333 \mu m$  zeigt in Abbildung 37 ein realistisches Bruchverhalten im Vergleich zum Experiment aus Abschnitt 4.2.

### Größe des RVEs

Die Größe eines quadratischen 2D-RVEs wird nach [37] mit dem Verhältnis  $\delta$  von Kantenlänge  $L$  des 2D-RVEs zum Filamentradius  $R$  in der Form

$$\delta = \frac{L}{R} = \sqrt{\frac{\pi N_F}{\phi}} \quad (124)$$

quantifiziert. Mit  $N_F$  wird die Anzahl der Filamente in einem RVE beschrieben. In der Literatur ist ein großes Spektrum für die optimale Größe eines RVEs zu finden [37].

GUSEV [11] bildet das effektive elastische Verhalten eines FKV bereits gut mit einem 2D-RVE mit hexagonaler Filamentanordnung ab. Geringe Verbesserungen wurden mit einem 2D-RVE mit zufälliger Filamentanordnung bei einem Verhältnis von  $\delta \approx 24$  erzielt.

GONZÁLEZ [10] untersucht 2D-RVEs mit zufälliger Filamentanordnung bei einem Verhältnis von  $\delta \approx 14$  und  $\delta \approx 21$  unter Druckbeanspruchung. Das Grenzflächenmodell zwischen Filament und Matrix beinhaltet ein Bruchkriterium und das Matrixmodell beinhaltet Plastizität jedoch kein Bruchkriterium. Solange die 2D-RVEs einen positiven Anstieg im Spannungs-/Dehnungsdiagramm zeigen, sind lediglich geringe Abweichungen  $< 5\%$  zwischen den Spannungsverläufen der 2D-RVEs mit den Verhältnissen  $\delta \approx 14$  und  $\delta \approx 21$  erkennbar. Bei einer negativen Steigung im Spannungs-/Dehnungsdiagramm treten bereits Abweichungen  $> 10\%$  auf.

TRIAS [37] empfiehlt bei der Bruchmodellierung der Matrix ein Verhältnis von  $\delta \geq 50$  zu verwenden.

**Erkenntnis 5.** Die minimale Größe des RVEs steigt, je lokaler die auftretenden Effekte in der Mikrostruktur sind [36, 10].

Zur Ermittlung der optimalen RVE-Größe bezüglich der in dieser Arbeit verwendeten Materialmodelle werden jeweils fünf zufällig ausgewählte RVEs mit  $\delta \approx 13$  und  $\delta \approx 26$  und zwei RVEs mit  $\delta \approx 52$  verglichen. Für eine Vergleichbarkeit mit den

Experimenten aus Abschnitt 4.2 werden der obere und untere Rand des RVEs mit periodischen Verschiebungsrandbedingungen beschrieben. An allen anderen Flächen werden die antiperiodische Krafrandbedingungen  $\bar{t}^I = -\bar{t}^J = 0$  aufgebracht. Diese Randbedingungen ermöglichen die freie Kontraktion des RVEs senkrecht zur aufgetragten Verschiebungsrandbedingung. Mit der Fließkurve FK2 und der Bruchkurve BK2 wird die Matrix modelliert. Für das Kohäsivzonenmodell werden die Parameter aus Tabelle 4 verwendet. Die Ergebnisse der Spannungs- und Dehnungsberechnung mit (123) und (122) sind in Abbildung 38 dargestellt.

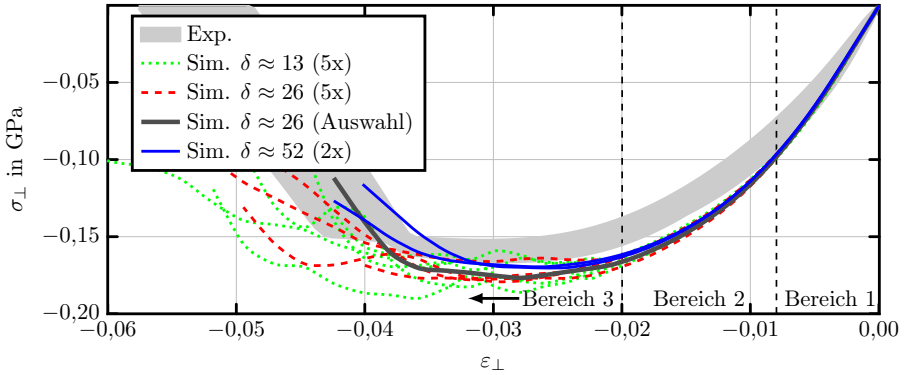


Abbildung 38: Einfluss der 2D-RVE-Größe im Spannungs-/Dehnungsdiagramm

Die Spannungskurven der 2D-RVEs sind im Bereich 1 deckungsgleich, da dieser Bereich von den elastischen Materialeigenschaften der Matrix und der Kohäsivzone beschrieben wird. Im Bereich 2 tritt Schädigung in den Kohäsivzonenelementen und plastisches Fließen in der Matrix auf, weshalb erste Abweichungen zwischen den Modellen zu sehen sind. Im Bereich 3 setzen Brüche in der Matrix und der Kohäsivzone ein. Bei den 2D-RVE mit  $\delta \approx 13$  sind starke Schwankungen in den Spannungskurven zu sehen. Der Bruchvorgang zwischen zwei Filamenten hat aufgrund der geringen Filamentanzahl einen großen Einfluss. Mit zunehmenden  $\delta$  zeigen auch die 2D-RVEs das konstante Spannungsniveau des Experiments im Bereich 3.

Abbildung 39 zeigt den Bruchwinkel in Abhängigkeit von  $\delta$  an drei Beispielen. Mit ansteigendem  $\delta$  wird auch der in Abbildung 33 gemessene Bruchwinkel von  $\theta = 54^\circ$  zunehmend besser abgebildet. Erkenntnis 5 wird demnach mit den Spannungskurven aus Abbildung 38 und dem Bruchwinkel aus Abbildung 39 belegt.

Das 2D-RVE aus Abbildung 39b ist in Abbildung 38 mit „Auswahl“ bezeichnet und bildet das Experiment aus Abschnitt 4.2 realistisch ab.

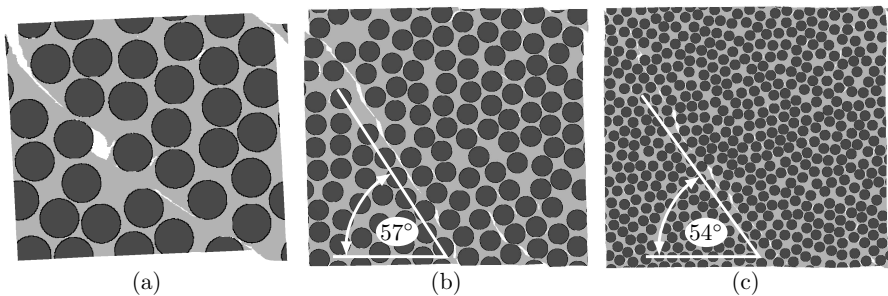


Abbildung 39: Einfluss der Filamentanordnung und Filamentanzahl auf das Bruchbild von RVEs, (a)  $\delta \approx 13$ , (b)  $\delta \approx 26$ , (c)  $\delta \approx 52$

**Erkenntnis 6.** Das elastisch/plastische Verhalten sowie der Bruchvorgang der Glasfaser/Epoxidharzverbunde wird mit dem in Abbildung 39b dargestellten RVE ausreichend genau abgebildet.

### Versagensmodellierung der Matrix und Kohäsivzonenkalibrierung

Nachdem die Geometrie der 2D-RVEs anhand Abbildung 39b festgelegt ist, müssen noch geeignete Werkstoffparameter für das Matrix- und Kohäsivzonenmaterial ausgewählt werden. Für das Matrixmaterial werden die Fließkurven FK1 und FK2, sowie die Bruchkurven BK2 und BK3 verwendet und in drei Fällen bewertet. Als Bewertungsgrundlage dient das Experiment aus Abschnitt 4.2. Die Versagensparameter  $R_Z$ ,  $R_S$  und  $R_D$  der Kohäsivzone aus Tabelle 4 werden in jedem Fall mit dem Faktor  $f_{KZ}$  in dem Bereich  $0,4 \leq f_{KZ} \leq 1,0$  skaliert. Mit dieser Variation der Versagensparameter wird der Einfluss der Kohäsivzone untersucht.

#### Fall 1: FK1-BK3

Die Fließkurve FK1 bildet das Experiment in Abschnitt 3.2.3 am Besten ab und dient aus diesem Grund als Ausgangspunkt. Die Bruchkurve BK3 wird aufgrund der mikroskopischen Bruchdehnung des Zugversuchs in Abbildung 14 gewählt. Abbildung 40 zeigt die mit (122) und (123) berechneten Spannungsverläufe der 2D-RVEs. Die Kohäsivzonenparameter beeinflussen den Beginn des nichtlinearen Materialverhaltens von dem 2D-RVE im Bereich 1. Im Bereich 2 erreichen alle Spannungskurven ein Niveau zwischen  $-0,14 \text{ GPa} \leq \sigma_{\perp} \leq -0,13 \text{ GPa}$ . Es ist selbst bei Werten von  $f_{KZ} > 1,0$  keine betragsmäßige Vergrößerung des Spannungsniveaus im Bereich 2 zu erwarten. Das nichtlineare Materialverhalten im Bereich 2 wird maßgeblich von dem Fließverhalten der Matrix bestimmt. Der Bruchvorgang setzt mit dieser Fließ- und Bruchkurvenkombination erst bei Dehnungen jenseits des Diagramms ein.

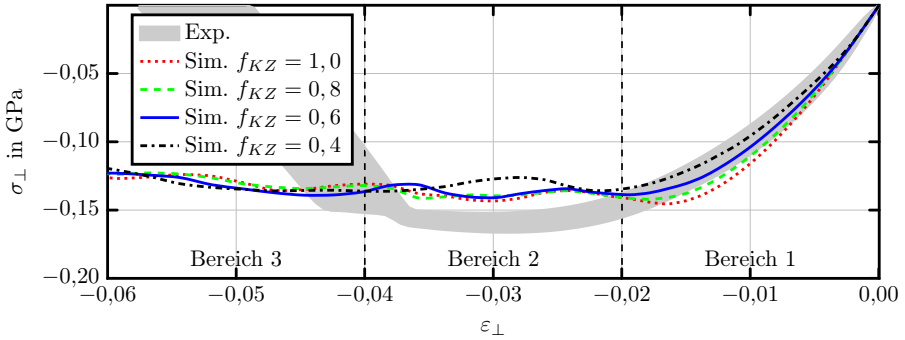


Abbildung 40: Einfluss von  $f_{KZ}$  auf die Spannungskurve des ausgewählten 2D-RVEs im Fall 1

#### Fall 2: FK2-BK3

Um das Spannungsniveau im Bereich 2 aus Abbildung 40 zu heben wird die Fließkurve FK2 anstatt der Fließkurve FK1 verwendet. Abbildung 41 zeigt die mit (122) und (123) berechneten Spannungsverläufe der 2D-RVEs.

Mit der Fließkurve FK2 kann das Spannungsniveau von  $\sigma_{\perp} \approx -0,16$  GPa im Bereich 2 besser als mit der Fließkurve FK1 abgebildet werden. Auch der Bruch des 2D-RVEs im Bereich 3 wird von der Fließkurve FK2 aufgrund der geringeren Neigung zur Lokalisierung beeinflusst.

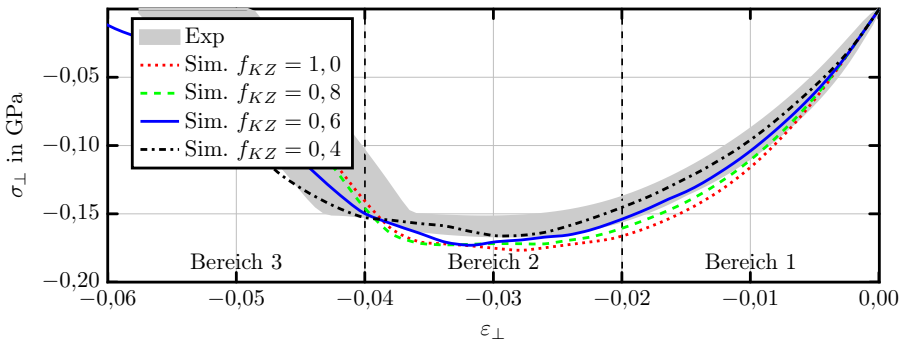


Abbildung 41: Einfluss von  $f_{KZ}$  auf die Spannungskurve des ausgewählten 2D-RVEs im Fall 2



## Fall 3: FK2-BK2

Abschließend wird der Einfluss der Bruchkurve BK2 auf das Bruchverhalten des ausgewählten RVEs in Abbildung 41 bewertet.

Mit der Bruchkurve BK2 wird das Spannungsniveau im Bereich 2 im Vergleich zum Fall 2 gesenkt. Auch der Bruch des 2D-RVEs setzt im Vergleich von Fall 3 zu Fall 2 früher ein. Die Spannungskurven mit dem Faktor  $f_{KZ} = 0,6$  in den Abbildungen 41

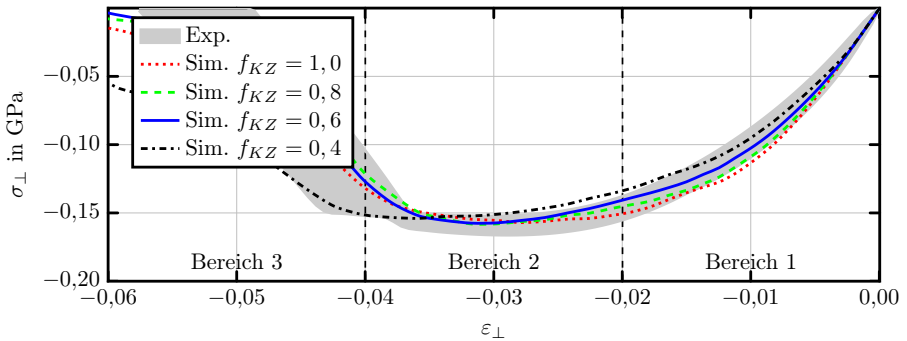


Abbildung 42: Einfluss von  $f_{KZ}$  auf die Spannungskurve des ausgewählten 2D-RVEs im Fall 3

und 42 zeigen beide eine gute Übereinstimmung mit der Spannungskurve des Experiments. Als weitere Bewertungsgrundlage werden die Bruchbilder der 2D-RVEs von Fall 2 und Fall 3 mit  $f_{KZ} = 0,6$  in Abbildung 43 dargestellt. Die Detailaufnahme der FKV-Probe beim Bruch in Abbildung 33c dient als Vergleich zu den 2D-RVEs beim Bruch in Abbildung 43. Die glatten Risskanten in Abbildung 43a sind auch in der Aufnahme des Experiments in Abbildung 33c zu erkennen. Fall 3 zeigt in Abbildung 43b viele Zugrisse in der gesamten Struktur, die in Abbildung 33c nicht erkennbar sind. Das Bruchverhalten wird demnach von Fall 2 besser als von Fall 3 abgebildet.

Das ausgewählte 2D-RVE mit der Fließkurve FK2 und der Bruchkurve BK3 bildet den Spannungsverlauf und das Bruchbild des Experiments aus Abschnitt 4.2 am Besten ab. Da mit der Fließkurve FK2 im Vergleich zur Fließkurve FK1 das entfestigende Fließverhalten vermieden wird, muss gelten:

**Erkenntnis 7.** Das entfestigende Fließverhalten der Matrix darf nicht zur Modellierung einer Mikrostruktur abgebildet werden, sondern muss durch ein idealplastisches Materialverhalten ersetzt werden.

Die skalierte Mikrostruktur aus Abschnitt 3.2.3 wurde hingegen am Besten mit der Fließkurve FK1 abgebildet. Demnach liefern Modelle mit entfestigenden Fließverhalten bei Makrostrukturen ein realistischeres Materialverhalten.

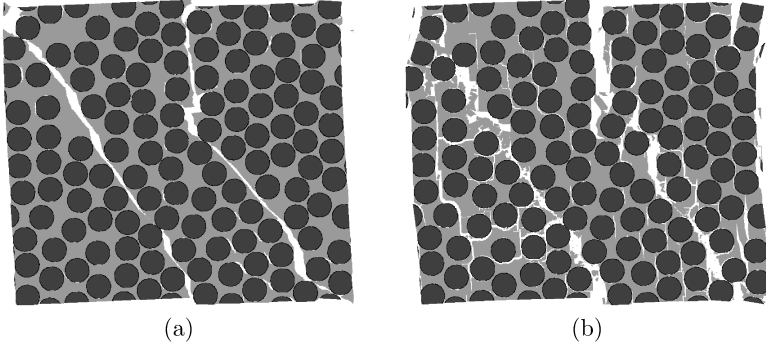


Abbildung 43: Vergleich der 2D-RVEs nach Bruch mit  $f_{KZ} = 0,6$ . (a) Fall 2, (b) Fall 3

Bei der Bruchkurve BK3 wurde im Vergleich zur Bruchkurve BK2 die Bruchdehnung  $\varepsilon_Z^B$  unter Zuglast aufgrund der plastischen Zone in Abbildung 14 angehoben, demnach muss gelten:

**Erkenntnis 8.** Die Bruchdehnung  $\varepsilon_Z^B$  der Matrix unter Zuglast muss anhand der plastischen Zone an der Bruchkante ermittelt werden.

Die Spannungskurven des 2D-RVEs mit  $f_{KZ} = 0,6$  in der Abbildung 41 zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Spannungskurven der Experimente. Werden die Festigkeitsparameter  $R_Z$ ,  $R_S$  und  $R_D$  in der Tabelle 4 skaliert, folgen die optimalen Werte für die Kohäsivzone in Tabelle 5.

Tabelle 5: Versagensparameter für die Kohäsivzone kalibriert an FKV-Druckproben

$R_Z$ in GPa	$R_S$ in GPa	$R_D$ in GPa	$\varepsilon_B$	$\gamma_B$
0,053	0,061	0,066	0,5	1,0

Die optimale Geometrie des RVEs in Abbildung 43 wird mit den Erkenntnissen 1 bis 6 beschrieben. Mit den Erkenntnissen 7 und 8 wird verdeutlicht, welche Änderungen am Matrixmodell für Makrostrukturen nötig sind, damit dies für Mikrostrukturen angewendet werden kann. Für das Kohäsivzonenmodell sind die Festigkeitsparameter der Glasfaser/Epoxidharz Grenzschicht in Tabelle 5 zusammengetragen. Mit diesen Erkenntnissen und Modellparametern folgt nun die Bruchkurvenprognose für Glasfaser/Epoxidharz-Verbunde.

#### 4.4 Effektives Materialverhalten und Bruchkurvenprognose von Mikrostrukturen

Zur Bestimmung des effektiven Materialverhaltens für den Glasfaser-Epoxidharz-Verbund werden die Materialparameter aus den Tabellen 1, 2 und 5 verwendet. Des Weiteren kommt die Fließkurve FK2 aus Abbildung 23 und die Bruchkurve BK3 aus Abbildung 24 zum Einsatz. Die verwendeten 2D-RVEs sind in Abbildung 44 dargestellt.

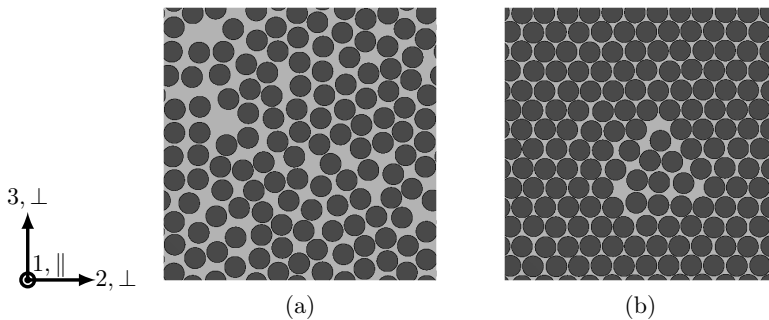


Abbildung 44: 2D-RVEs zur Bestimmung des effektiven elastischen Materialverhaltens und der Bruchkurven,

(a) ausgewähltes 2D-RVE aus Abbildung 38 mit  $\phi = 0,60$ , (b) mit RSE Algorithmus erzeugtes 2D-RVE mit  $\phi = 0,77$

Das 2D-RVE in Abbildung 44a besitzt einen Faservolumengehalt von  $\phi = 0,60$  und entspricht der Auswahl aus Abbildung 38. BERGER [3] ermittelt für sein gewickeltes Rohr den Faservolumengehalt von  $\phi \approx 0,60$ , der etwa dem 2D-RVE aus Abbildung 44a entspricht. Der Faservolumengehalt eines Rovings in dem gewickelten Rohr beträgt  $\phi \approx 0,77$ . Das 2D-RVE in Abbildung 44b wird verwendet, um das Bruchverhalten eines solchen Rovings zu beschreiben.

Zur Ermittlung der effektiven Koordinaten  $\bar{C}_{ijkl}$  des Elastizitätstensors wird mit der HILL-Bedingung [13]

$$U = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dV = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (125)$$

die Gleichheit der mittleren Formänderungsenergiegedichte  $U$  zwischen den mikroskopischen (heterogenen)  $(\varepsilon_{ij}, C_{ijkl})$  und den makroskopischen (homogenen) Größen  $(\bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{C}_{ijkl})$  über das 2D-RVE-Volumen  $V$  gefordert. Demnach muss

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (126)$$

gelten. Mit den in [14] dargestellten 6 Grundlastfällen können die 36 Gleichungen formuliert werden, um die Koordinaten  $C_{ijkl}$  zu berechnen. Wird eine transversal iso-

trope Elastizität gemäß (26) vorausgesetzt, folgen die in Tabelle 6 zusammengefassten Werte für beide 2D-RVEs aus Abbildung 44.

Tabelle 6: Effektive transversal isotrope Elastizitätsparameter für den Glasfaser-Epoxidharz-Verbund mit  $\phi = 0,60$  und  $\phi = 0,77$

$\phi$	$\frac{E_{\parallel}}{\text{GPa}}$	$\frac{E_{\perp}}{\text{GPa}}$	$\frac{G_{\perp\parallel}}{\text{GPa}}$	$\frac{G_{\perp\perp}}{\text{GPa}}$	$\nu_{\parallel\perp}$
0,60	43,865	13,067	4,409	4,385	0,086
0,77	55,244	22,058	7,530	7,952	0,104

Zur Untersuchung des Zwischenfaserbruchverhaltens werden die effektiven  $\bar{\tau}_{\perp\perp}/\bar{\sigma}_{\perp}$  und  $\bar{\tau}_{\perp\parallel}/\bar{\sigma}_{\perp}$ -Bruchkurven unter Verwendung der 2D-RVEs aus Abbildung 44 und den periodischen Randbedingungen aus (120) und (121) mit einzelnen virtuellen Experimenten berechnet. Mit  $V_{\perp\perp}$  und  $V_{\perp\parallel}$  werden die konstanten Verhältnisse von jeweils zwei Koordinaten des makroskopischen Deformationsgradienten  $\bar{\mathbf{F}}$  in einem virtuellen Experiment beschrieben. Die Belastung des 2D-RVEs erfolgt mit konstantem Verhältnis bis zum Bruch. Dreizehn virtuelle Experimente werden zur Berechnung einer Bruchkurve verwendet. Das Verhältnis  $V_{\perp\perp}$  wird so gewählt, dass möglichst Punkte mit gleichem Abstand für die  $\bar{\tau}_{\perp\perp}/\bar{\sigma}_{\perp}$ -Bruchkurven folgen. Entsprechendes gilt für  $V_{\perp\parallel}$  und die  $\bar{\tau}_{\perp\parallel}/\bar{\sigma}_{\perp}$ -Bruchkurve. Die Randbedingungen erhalten für die  $\bar{\tau}_{\perp\perp}/\bar{\sigma}_{\perp}$ -Bruchkurven die Form

$$V_{\perp\perp} = \frac{\bar{F}_{33}}{\bar{F}_{23}} = \frac{\bar{F}_{33}}{\bar{F}_{32}} = \text{konst.} \quad (127)$$

und

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{13} = 0 \quad , \quad (128)$$

sowie für die  $\bar{\tau}_{\perp\parallel}/\bar{\sigma}_{\perp}$ -Bruchkurven die Form

$$V_{\perp\parallel} = \frac{\bar{F}_{33}}{\bar{F}_{13}} = \frac{\bar{F}_{33}}{\bar{F}_{31}} = \text{konst.} \quad (129)$$

und

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{23} = 0 \quad . \quad (130)$$

Die Ergebnisse der Bruchkurvenprognose sind in den Abbildungen 45 für  $\phi = 0,60$  und 46 für  $\phi = 0,77$  zusammen mit dem an die virtuellen Experimente angepassten PUCK-Modell (70), (71) dargestellt.

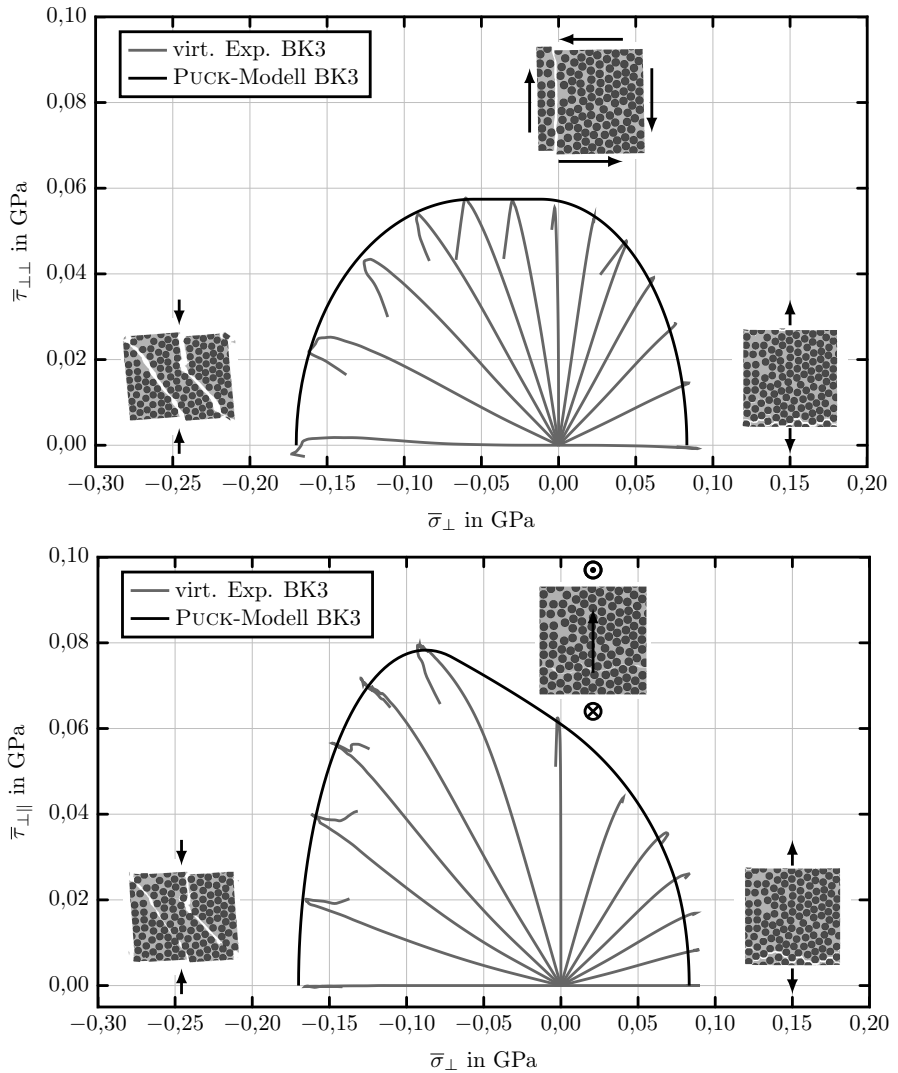


Abbildung 45: Auf Basis der virtuellen Experimente ermittelten  $\bar{\tau}_{\perp\perp} / \bar{\sigma}_{\perp}$  und  $\bar{\tau}_{\perp\parallel} / \bar{\sigma}_{\perp}$  Bruchkurven eines Glasfaser/Epoxidharz-Verbunds mit einem Faservolumengehalt von  $\phi = 0,60$

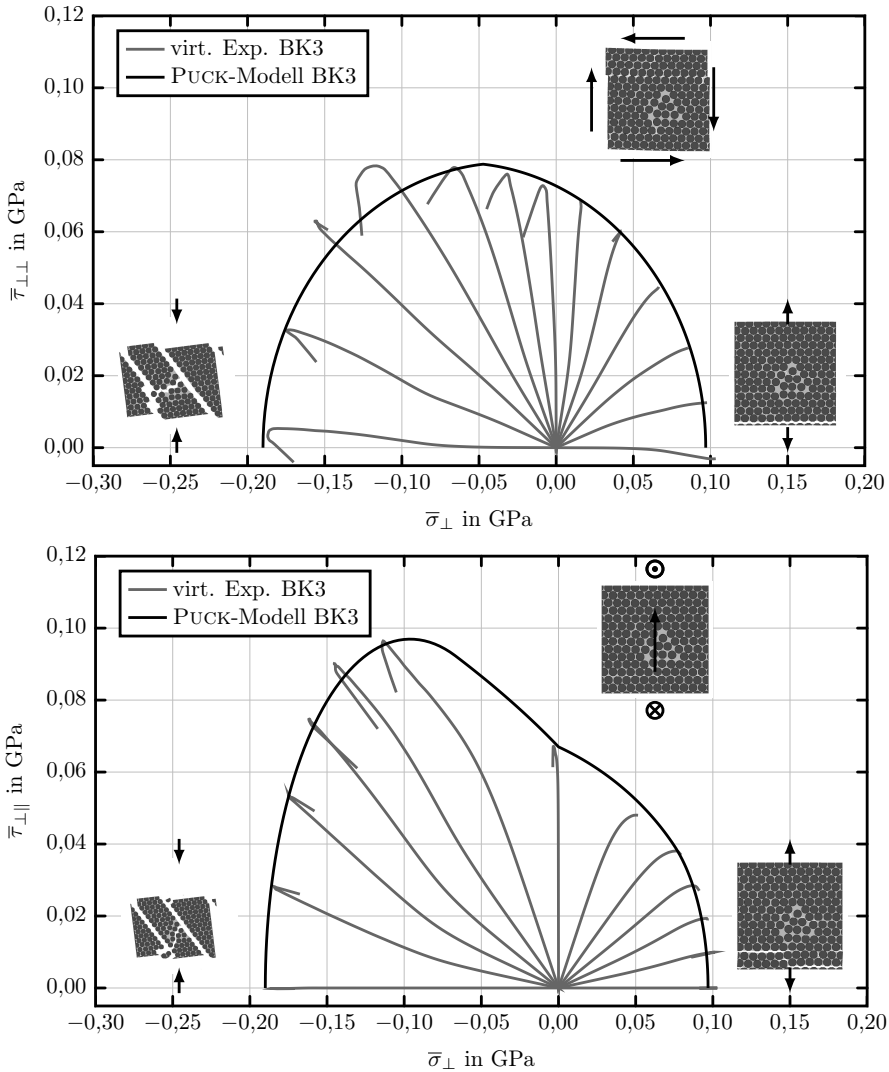


Abbildung 46: Auf Basis der virtuellen Experimente ermittelten  $\bar{\tau}_{\perp\perp} / \bar{\sigma}_{\perp}$  und  $\bar{\tau}_{\perp\parallel} / \bar{\sigma}_{\perp}$  Bruchkurven eines Glasfaser/Epoxidharz-Verbunds mit einem Faservolumengehalt von  $\phi = 0,77$

Das PUCK-Modell ist jeweils an die im virtuellen Experiment berechnete Kurvenschar angepasst und beschreibt die maximal ertragbare Spannungscombination des Glasfaser/Epoxidharz-Verbunds. Die für das PUCK-Modell verwendeten Parameter sind in Tabelle 7 zusammengefasst.

Tabelle 7: Ermittelte Versagensparameter für das Puck Modell und der Wertebereich nach PUCK [22] für Glasfaser/Epoxidharz-Verbunde zur Modellierung des Zwischenfaserbruchs (ZFB)

	$\frac{R_{\perp}^{(+)}}{\text{GPa}}$	$\frac{R_{\perp}^{(-)}}{\text{GPa}}$	$\frac{R_{\perp\parallel}}{\text{GPa}}$	$p_{\perp\parallel}^{(-)}$	$p_{\perp\parallel}^{(+)}$	$p_{\perp\perp}^{(-)}$	$p_{\perp\perp}^{(+)}$
Wertebereich PUCK [22]	$\geq 0,04$ $\leq 0,08$	$\geq 0,12$ $\leq 0,24$	$\geq 0,60$ $\leq 0,10$	$\geq 0,10$ $\leq 0,30$	$\geq 0,15$ $\leq 0,45$	0,15	0,15
$\phi = 0,60$	0,075	0,170	0,061	0,250	0,250	0,480	0,100
$\phi = 0,77$	0,095	0,190	0,067	0,450	0,200	0,200	0,400

Die Parameter in Tabelle [7] für die Bruchkurven mit  $\phi = 0,60$  liegen bis auf  $p_{\perp\perp}^{(-)}$  in dem Bereich des Wertebereichs von PUCK [22]. PUCK zeigt, wie mit Rohrprüfkörpern [24] die  $\bar{\tau}_{\perp\parallel} / \bar{\sigma}_{\perp}$ -Bruchkurve erstellt und die Parameter für das PUCK-Modell gefunden werden [23, 25]. Anhand dieser Bruchkurve können lediglich  $R_{\perp}^{(\pm)}$ ,  $R_{\perp\parallel}$  und  $p_{\perp\parallel}^{(\pm)}$  zuverlässig ermittelt werden. Eine Messung der  $\bar{\tau}_{\perp\perp} / \bar{\sigma}_{\perp}$ -Bruchkurve ist mit Rohrprüfkörpern nicht möglich und die Parameter  $p_{\perp\perp}^{(+)}$  und  $p_{\perp\perp}^{(-)}$  können nach diesem Verfahren nur geschätzt werden.

Die Festigkeitsparameter  $R_{\perp}^{(+)}$  und  $R_{\perp\parallel}$  in Tabelle [7] zur Abbildung der Bruchkurve mit  $\phi = 0,77$  liegen oberhalb des empfohlenen Wertebereichs von PUCK [22]. In den makroskopischen Strukturen ist ein maximaler Faservolumengehalt von  $\phi = 0,70$  technisch umsetzbar [29]. Demnach ist nicht zu erwarten, dass in [22] Rohrprüfkörper mit einem Faservolumengehalt von  $\phi = 0,77$  in Betracht gezogen wurden. BERGER [3] zeigt jedoch, dass ein Faservolumengehalt von  $\phi = 0,77$  in einem Roving realistisch ist. Steifigkeits- und Festigkeitsparameter für Rovings in FKV mit  $\phi > 0,7$  können somit nur mit einem numerischen Verfahren, wie in diesen Abschnitt, bestimmt werden.

## 5 Versagensprognose eines GFK-Rohrs mit einem Makro- und Mesomodell

### 5.1 Druckversuch am Glasfaser/Epoxidharz-Rohr

Als Bewertungsgrundlage nachfolgender Meso- und Makromodelle dient das Experiment eines Glasfaser/Epoxidharz-Rohrs unter Drucklast mit einem Innendurchmesser von  $D_i = 40$  mm, einer Wandstärke von  $T = 1$  mm und einer Höhe von  $H = 60$  mm. Das Rohr wurde am Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik in Dresden mittels des Kreuzwickelverfahrens hergestellt. Mit einem Wickelwinkel von  $\alpha = \pm 60^\circ$  wurde Endlosfaser auf den Wickelkern abgelegt, bis eine deckende Schicht entstand. Um die Wandstärke von  $T = 1$  mm zu erreichen, sind 2 Faserlagen notwendig.

Die Druckprüfung erfolgt mit einer Traversengeschwindigkeit von  $v_z = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ . Zur Minimierung der Reibung an den Rändern des Rohrs sind die Druckplatten der Prüfmaschine poliert und mit Silikonspray behandelt. Abbildung 47 zeigt links die Druckkraft  $F_z$  in Abhängigkeit der Streckung  $\lambda_z$  und rechts das Glasfaser/Epoxidharz-Rohr beim Bruch.

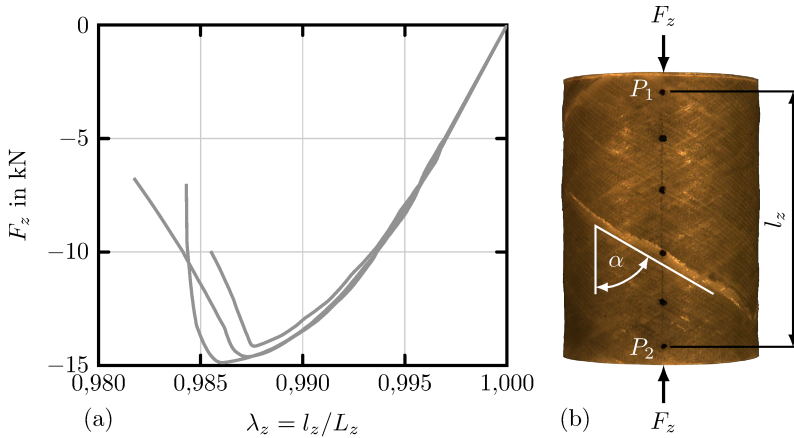


Abbildung 47: Glasfaser/Epoxidharz-Druckrohr unter Drucklast. (a) Spannungs-/Streckungsdiagramm, (b) Probe bei Bruch

Die Streckung  $\lambda_z$  wird anhand der Länge  $l_z$  zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  (dargestellt in Abbildung 47b) berechnet. Aufgrund der Darstellung der Kraft in Abhängigkeit der Streckung in Abbildung 47a werden die Ränder des Rohrs oberhalb von Punkt  $P_1$  und unterhalb von Punkt  $P_2$  nicht berücksichtigt. Das Diagramm in Abbildung 47a wird demnach nicht von Fertigungstoleranzen und Oberflächenrauheit an den Rohrrändern beeinflusst. Der in Abbildung 47b dargestellte Prüfkörper zeigt einen Riss entlang des Faserwinkels  $\alpha$ .



## 5.2 Geometrische Modellierung des GFK-Rohrs

Die in Abschnitt 5.1 beschriebene GFK-Rohrgeometrie wird mittels Makro- und Mesomodell diskretisiert. Die beiden Modellierungsarten sind in Abbildung 48 gegenübergestellt.

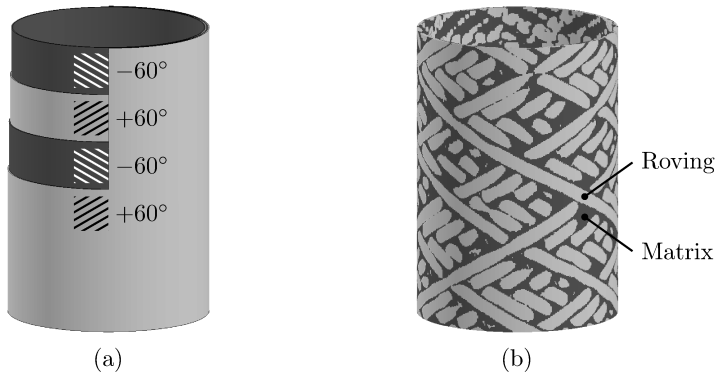


Abbildung 48: Modellierung des Glasfaser/Epoxidharz Rohrs, (a) Makromodell, (b) Mesomodell

In Abbildung 48a ist das Makromodell mit den 4 unidirektionalen Faserschichten mit  $\pm 60^\circ$ -Faserrichtung dargestellt. Das Glasfaser/Epoxidharzrohr aus Abschnitt 5.1 besteht aus 2 Faserschichten mit einer  $\pm 60^\circ$ -Wicklung. Jede dieser Faserschichten wird in dem Makromodell in 2 Schichten mit paralleler Faserrichtung zerlegt. Die Ondulation der Rovings wird in dem Makromodell somit vernachlässigt. BERGER [3] ermittelt einen Faservolumengehalt von  $\phi \approx 0,60$  in dem gesamten Rohr. Die Elementkantenlänge in dem Makromodell beträgt  $L_E = 0,25$  mm.

Das Mesomodell ist in Abbildung 48b dargestellt. Bei dieser Diskretisierung wird die Rovingstruktur mit der Ondulation der Rovings und das Matrixmaterial in den Zwischenräumen abgebildet. Das Mesomodell basiert auf einer Fertigungssimulation des Wicklungsprozesses mit anschließender Voxelnetzgenerierung für den Roving und die einbettende Matrix gemäß [3]. Die Elementkantenlänge entlang des Rohrumfanges und der Rohrhöhe beträgt  $L_E = 0,2$  mm und entlang der Rohrwandstärke  $L_E = 0,083$  mm. Mit dieser Elementabmessung wird der Rovingquerschnitt entlang der Rohrwandstärke mit 3 Elementen und entlang der Rohroberfläche mit 10 Elementen abgebildet. BERGER [3] ermittelt in dem Roving einen Faservolumengehalt von  $\phi = 0,77$ .

Mit beiden Modellen aus Abbildung 48 wird die experimentelle Untersuchung des Glasfaser/Epoxidharz-Rohrs aus Abschnitt 5.1 nachgestellt. Die beiden Druckplatten der Maschine werden mit Starrkörpern abgebildet. Die Modellierung des Kontakts

zwischen Druckplatten und Rohr erfolgt mit der Annahme  $\mu = 0,1$  für den Reibwert.

### 5.3 Werkstoffmodell für den Roving

#### Effektives Materialverhalten

Das Werkstoffmodell für den Roving (Rovingmodell) wird in Verbindung mit den geometrischen Diskretisierungen aus Abbildung 48 verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Schichten des Makromodells aus Abbildung 48a aus parallel angeordneten Rovings bestehen, so dass mit dem Rovingmodell sowohl die Rovinge des Mesomodells als auch die Schichten des Makromodells abgebildet werden können. In den Rovingen wird von einer parallelen Filamentanordnung ausgegangen und gegenüber den Mikrostrukturen aus Abschnitt 4 nicht mehr zwischen den Bestandteilen Filament und Matrix unterschieden. Das Ziel des Rovingmodells ist die homogenisierte Modellierung der virtuellen Experimente mit den diskreten Mikrostrukturen aus Abschnitt 4.4.

Die transversal isotrope Elastizität aus Gleichung (26) bildet in Verbindung mit den Parametern aus Tabelle 6 das elastische Verhalten des Rovings ab. In Tabelle 6 entspricht der Faservolumengehalt  $\phi = 0,60$  dem Faservolumengehalt einer Schicht des Makromodells und  $\phi = 0,77$  dem Faservolumengehalt eines Rovings des Mesomodells.

#### Faserbruch

Bei der Zugbeanspruchung in Faserrichtung wird von einem elastischen Materialverhalten bis zu dem Einsetzen des Bruchs ausgegangen. Der Faserbruch (FB) wird mit (68) beschrieben. Die Festigkeitsparameter für den Faserbruch werden vereinfacht mit dem Faservolumengehalt  $\phi$  und der Zugfestigkeit  $R_t$  der Filamente aus Tabelle 1 in der Form

$$R_{||}^{(\pm)} = \phi R_t \quad (131)$$

berechnet. Für die Faservolumengehalte  $\phi = 0,60$  und  $\phi = 0,77$  folgen die in Tabelle 8 aufgelisteten Festigkeitsparameter für den Faserbruch.

Tabelle 8: Ermittelte Festigkeitsparameter für das Puck Modell für Glasfaser/Epoxidharz-Verbunde zur Modellierung des Faserbruchs (FB)

	$\frac{R_{  }^{(\pm)}}{\text{GPa}}$
$\phi = 0,60$	0,685
$\phi = 0,77$	0,856

#### Zwischenfaserbruch

Die virtuellen Experimente aus Abschnitt 4.4 zeigen aufgrund der Kohäsivzonenschädigung sowie des plastischen Fließens und Brechens der Matrix eine nichtlineare

Spannungsantwort. Mit dem Begriff Zwischenfaserbruch (ZFB) wird das nichtlineare Verhalten des Rovingmodells vom Anriss bis zum finalen Bruch mit einem Schädigungsmodell gemäß (58) in Kombination mit elastischen Materialverhalten beschrieben. Abbildung 49 zeigt schematisch das Rovingmodell im Vergleich zu einem virtuellen Experiment aus Abschnitt 4.4 an einer FKV-Probe unter Zuglast senkrecht zur Faserrichtung.

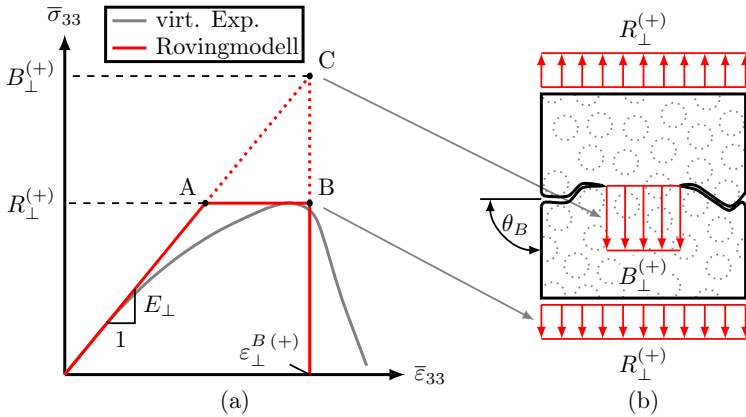


Abbildung 49: Darstellung des Rovingmodells am Beispiel Zugversuch senkrecht zur Faserrichtung. (a) Modellparameter im Spannungs-/Dehnungsdiagramm, (b) Spannungen am Element unmittelbar vor dem Bruch

Der maximal ertragbare Spannungszustand den das FKV-Element ausgesetzt werden kann, wird mit dem PUCK-Modell (70) bzw. (71) prognostiziert. Dazu wird mit dem Algorithmus von SCHIRMAIER (28) der Winkel  $\theta$  gesucht, bei dem die Anstrengung  $F_{ZFB}^{(\pm)}$  am größten ist. Erreicht die Anstrengung den Wert  $F_{ZFB}^{(\pm)} = 1$ , ist der maximal ertragbare Spannungszustand erreicht und der Bruchwinkel  $\theta_B$  kennzeichnet die Lage der prognostizierten Bruchfläche. Der maximal ertragbare Spannungszustand beim Anriss ist in Abbildung 49a anhand des Punkts A und der Bruchwinkel  $\theta_B$  ist in Abbildung 49b dargestellt.

Zur Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens werden die Spannungen auf der prognostizierten Bruchfläche nach dem Erreichen von  $F_{ZFB}^{(\pm)} = 1$  geschädigt, so dass bei weiterer Belastung  $F_{ZFB}^{(\pm)} = 1$  gilt. Mit diesem Verfahren wird der Rissfortschritt modelliert, wobei der Bruchwinkel  $\theta_B$  und die Spannung  $\bar{\sigma}_{33} = R_{\perp}^{(+)}$  konstant gehalten werden. Abbildung 49b zeigt die Spannung  $B_{\perp}^{(+)}$  auf der Restbruchfläche unmittelbar vor dem schlagartigen Bruch, welche in Abbildung 49a durch Punkt C gekennzeichnet ist.

Das am eindimensionalen Fall eingeführte Vorgehen zur Beschreibung des Bruchs wird verallgemeinert, indem die für den Anriss geltenden Festigkeitsparameter  $R$  im PUCK-Modell (70) bzw. (71) durch entsprechende Parameter  $B$  für den Bruch ersetzt

werden. Damit wird der finale Bruch bei Zugspannung auf der Bruchfläche mit der Anstrengung  $\hat{F}_{ZFB}^{(+)}$  und bei Druckspannung auf der Bruchfläche mit der Anstrengung  $\hat{F}_{ZFB}^{(-)}$  gemäß

$$\hat{F}_{ZFB}^{(+)} = \sqrt{\left(\frac{1}{B_{\perp}^{(+)}} - \frac{b_{\perp\psi}^{(+)}}{B_{\perp\psi}^A}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{B_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{B_{\perp\parallel}}\right)^2} + \frac{b_{\perp\psi}^{(+)}}{B_{\perp\psi}^A} \sigma_n \quad (132)$$

$$\hat{F}_{ZFB}^{(-)} = \sqrt{\left(\frac{b_{\perp\psi}^{(-)}}{B_{\perp\psi}^A} \sigma_n\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{B_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{B_{\perp\parallel}}\right)^2} + \frac{b_{\perp\psi}^{(-)}}{B_{\perp\psi}^A} \sigma_n \quad (133)$$

beschrieben. Weiterhin werden in (132) und (133) die Steigungsparameter  $p$  durch  $b$  ersetzt. Die gleiche Ersetzung angewendet auf (72) und (73) liefert

$$\frac{b_{\perp\psi}^{(\pm)}}{B_{\perp\psi}^A} = \frac{b_{\perp\perp}^{(\pm)}}{B_{\perp\perp}^A} \cos^2(\psi) + \frac{b_{\perp\parallel}^{(\pm)}}{B_{\perp\parallel}} \sin^2(\psi) \quad \text{mit} \quad \psi = \arctan\left(\frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}\right) \quad (134)$$

$$B_{\perp\perp}^A = \frac{B_{\perp}^{(-)}}{2(1 + b_{\perp\perp}^{(-)})} \quad (135)$$

Die konkreten Werte für  $B_{\perp}^{(+)}$ ,  $B_{\perp}^{(-)}$ ,  $B_{\perp\parallel}$  und  $b_{\perp\perp}^{(-)}$  werden durch die Anpassung an die mit den Mikromodellen aus Abschnitt 4.4 berechenbaren Spannungs-/Verzerrungsverläufe (virt. Exp.) ermittelt. Des Weiteren werden die Annahmen  $b_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\perp}^{(+)}$ ,  $b_{\perp\parallel}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$  und  $b_{\perp\parallel}^{(+)} = p_{\perp\parallel}^{(+)}$  getroffen. Tabelle 9 zeigt die Parameter zur Prognose des Bruchs der Mikrostrukturen aus Abbildung 44a mit  $\phi = 0, 60$  und Abbildung 44b mit  $\phi = 0, 77$ .

Tabelle 9: Ermittelte Bruchparameter für das Puck Modell

	$\frac{B_{\perp}^{(+)}}{\text{GPa}}$	$\frac{B_{\perp}^{(-)}}{\text{GPa}}$	$\frac{B_{\perp\parallel}}{\text{GPa}}$	$b_{\perp\parallel}^{(-)}$	$b_{\perp\parallel}^{(+)}$	$b_{\perp\perp}^{(-)}$	$b_{\perp\perp}^{(+)}$
$\phi = 0, 60$	0,157	0,523	0,154	0,250	0,250	1,480	0,100
$\phi = 0, 77$	0,195	0,560	0,206	0,450	0,200	0,790	0,400

In Abbildung 50 sind die analytisch ausgewerteten Spannungs-/Verzerrungsverläufe der Grundlastfälle Zug, Druck und Schub für die Faservolumenanteile  $\phi = 0, 60$  und  $\phi = 0, 77$  dargestellt. Diese Spannungsverläufe basieren auf den elastischen Parametern aus Tabelle 6, den PUCK-Parametern zur Prognose des Schädigungsbeginns aus Tabelle 7 und den PUCK-Parametern zur Prognose des Bruchs aus Tabelle 9. Weiterhin sind in Abbildung 50 die Spannungsverläufe der virtuellen Experimente aus Abschnitt 4.4 dargestellt. Ein Vergleich macht deutlich, dass die in diesem Kapitel für den Roving abgeleiteten bilinearen Spannungsverläufe die virtuellen Experimente ausreichend genau beschreiben.

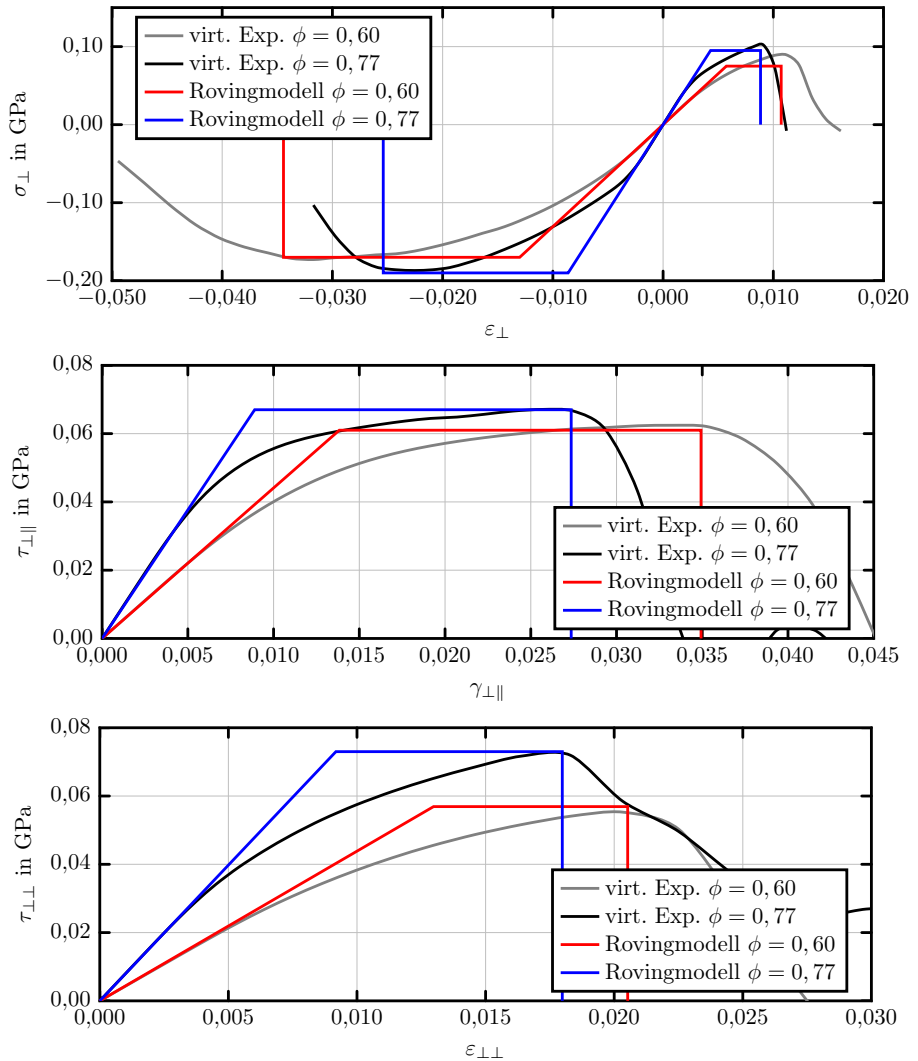


Abbildung 50: Vergleich der Spannungs-/Verzerrungsverläufe der virtuellen Experimente (virt. Exp.) mit denen des Rovingmodells. (oben) Zug/Druck im  $\sigma_{\perp}/\epsilon_{\perp}$ -Diagramm, (mitte) Schub im  $\tau_{\parallel}/\gamma_{\parallel}$ -Diagramm, (unten) Schub im  $\tau_{\perp\perp}/\epsilon_{\perp\perp}$ -Diagramm

## 5.4 Versagensprognose des Druckrohrs mittels Makro- und Mesomodell

### Makromodellierung

Die Simulation erfolgt mit dem Makromodell aus Abbildung 48a und dem in Abschnitt 5.3 beschriebenen Werkstoffmodell. BERGER [3] ermittelt für das gesamte Rohr einen Faservolumengehalt von  $\phi = 0,60$ , weshalb die entsprechenden Modellparameter aus den Tabellen 6 bis 9 verwendet werden. Abbildung 51 zeigt die damit berechnete Kraft/Streckungskurve im Vergleich zum Kraftverlauf des Experiments aus Abschnitt 5.1 sowie den Konturplot mit der Anstrengung  $F_{ZFB}$  passend zum Punkt S.

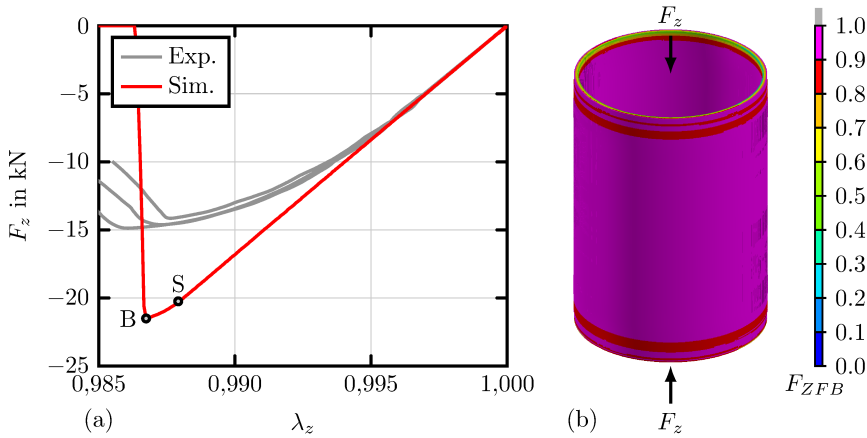


Abbildung 51: Simulation des Druckversuchs aus Abschnitt 5.1 mit dem Makromodell. (a) Vergleich zwischen Experiment und Simulation im  $F_z/\lambda_z$ -Diagramm, (b) Anstrengung auf Zwischenfaserbruch  $F_{ZFB}$

Die Kraftkurve der Simulation weist in Abbildung 51a vom Ursprung bis zum Punkt S einen linearen Verlauf aufgrund des elastischen Werkstoffverhaltens auf. Der Punkt S aus Abbildung 51a entspricht in Abbildung 50 dem Übergang vom initialen Anstieg zum horizontalen Abschnitt der bilinearen Spannungskurven des Rovingmodells. Mit zunehmender Belastung bleibt die Spannung auf der Bruchfläche ab diesem Punkt konstant, jedoch ist in Abbildung 51a zwischen den Punkten S und B eine Zunahme der Kraft  $F_z$  zu beobachten. Es wird postuliert, dass die Krafterhöhung der Kraftkurve aus der Simulation in Abbildung 51a nach dem Punkt S aufgrund einer Lastumleitung in Faserrichtung entstehen.

Der Vergleich der Kraftkurven von der Simulation und dem Experiment in Abbildung 51a zeigt, dass der initiale elastische Anstieg bis  $|F_z| = 7$  kN von dem Makromodell realistisch prognostiziert wird. Diese Beobachtung bestätigt sinngemäß Erkenntnis 5, wonach eine genaue geometrische Diskretisierung der Probenstruktur erst bei einer Betrachtung lokaler Effekte nötig ist.

Ab  $|F_z| = 7 \text{ kN}$  zeigt die Kraftkurve des Experiments ein nichtlineares Werkstoffverhalten, welches das Simulationsmodell erst ab dem Punkt  $S$  bei einer Kraft von  $|F_z| = 20 \text{ kN}$  aufweist. Der Punkt  $B$  liegt mit einer Kraft von  $|F_z| = 21,5 \text{ kN}$  deutlich oberhalb der im Experiment gemessenen Bruchkraft von  $|F_z| = 14,5 \text{ kN}$ .

**Erkenntnis 9.** Mit dem schichtbasierten Makromodell ohne Rovingondulation kann die initiale Struktursteifigkeit abgebildet werden, jedoch wird die maximal ertragbare Kraft deutlich überschätzt.

In Abbildung 51b ist der dem Punkt  $S$  in Abbildung 51a zugeordnete Konturplot des Rohrs mit der Anstrengung auf Zwischenfaserbruch  $F_{ZFB}$  dargestellt. Mit  $F_{ZFB} = 1$  setzt Schädigung im Element ein und der Riss auf der Bruchfläche wächst mit zunehmender Belastung. Bis auf die von Reibung beeinflussten Ränder weist das Rohr eine gleichmäßige Anstrengung bezüglich Zwischenfaserbruch auf.

**Erkenntnis 10.** Mit dem schichtbasierten Makromodell ohne Rovingondulation kann keine Aussage über den Versagensort und die Versagensart getroffen werden.

### Mesomodellierung

Die Simulation erfolgt mit dem Mesomodell aus Abbildung 48b und dem in Abschnitt 5.3 beschriebenen Werkstoffmodell. BERGER [3] ermittelt einen mittleren Faservolumengehalt von  $\phi = 0,77$  in den Rovings, weshalb die entsprechenden Modellparameter aus den Tabellen 6 bis 9 verwendet werden. Das Epoxidharz zwischen den Rovings wird mit dem Werkstoffmodell aus Abschnitt 3.2.2 mit den Parametern aus Tabelle 2 sowie der Fließkurve FK2 und der Bruchkurve BK3 aus den Abbildungen 23 und 24 modelliert. Abbildung 52 zeigt die mit dem Mesomodell berechnete Kraft/Streckungskurve im Vergleich zum Kraftverlauf des Experimentes aus Abschnitt 5.1 sowie den Konturplot mit der Anstrengung  $F_{ZFB}$  passend zum Punkt  $S$ .

Die Kraftkurve der Simulation weist in Abbildung 52a vom Ursprung bis zum Punkt  $S$  einen linearen Verlauf aufgrund des elastischen Werkstoffverhaltens auf. Ab dem Punkt  $S$  tritt Schädigung an den Rändern der einzelnen Rovings auf, wie Abbildung 52b zeigt. Zwischen den Punkten  $S$  und  $B$  in Abbildung 52a ist so gut wie keine Nichtlinearität in der Kraftkurve zu sehen. Auch in dem Mesomodell wird wie schon bei dem Makromodell die äußere Last in Faserrichtung umgelenkt. Die geringe Nichtlinearität der Kraftkurve von dem Mesomodell beruht auf der Tatsache, dass nur wenige Elemente an den Rovingrändern geschädigt werden.

Mit dem Verweis auf Erkenntnis 5 zeigt Abbildung 52a, dass der initiale Anstieg der Kraftkurve des Experiments realistisch von der Simulation prognostiziert werden kann.

Der nichtlineare Verlauf der experimentellen Kraftkurve ab  $|F_z| = 7 \text{ kN}$  kann auch mit dem Mesomodell und den entsprechenden Werkstoffmodellen nicht realistisch abgebildet werden. Jedoch wird die im Experiment gemessene Bruchkraft von  $|F_z| = 14,5 \text{ kN}$  mittels der Simulation mit dem Mesomodell mit  $|F_z| = 15,5 \text{ kN}$  deutlich

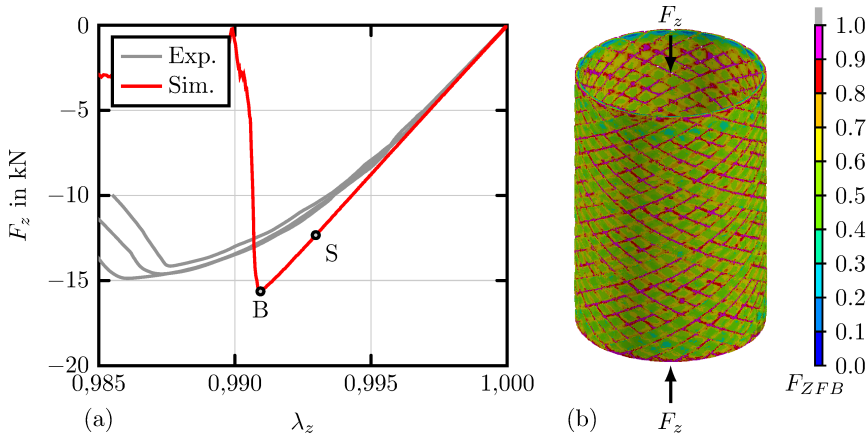


Abbildung 52: Simulation des Druckversuchs aus Abschnitt 5.1 mit dem Mesomodell. (a) Vergleich zwischen Experiment und Simulation im  $F_z/\lambda_z$ -Diagramm, (b) Anstrengung auf Zwischenfaserbruch  $F_{ZFB}$  der Roving-Elemente

besser als von dem Makromodell mit  $|F_z| = 21,5$  kN abgebildet. Dieser Effekt ist auf die Ondulation der Rovings im Mesomodell zurückzuführen.

**Erkenntnis 11.** Die Ondulation der Rovings hat einen entscheidenden Einfluss auf die Prognose der Bruchkraft.

In Abbildung 52b ist die Anstrengung auf Zwischenfaserbruch an den Rovingelementen passend zu dem Punkt S als Konturplot dargestellt. Das Mesomodell liefert eine detaillierte Aussage über kritische Bereiche in denen Zwischenfaserbruch einsetzt. Ein Vergleich zwischen den Abbildung 47b und 52b zeigt, dass der prognostizierte Zwischenfaserbruch entlang der Rovings in dem Simulationsmodell mit der Beobachtung im Experiment übereinstimmt.

**Erkenntnis 12.** Die kritischen Bereiche in denen Zwischenfaserbruch einsetzt werden von dem Mesomodell realistisch prognostiziert.

Die mit dem Mesomodell berechnete Streckung bei Bruch von  $\lambda_z = 0,991$  zeigt keine gute Übereinstimmung mit der im Experiment ermittelten Streckung von  $\lambda_z = 0,986$ . Dieser Unterschied in der Streckung kann der Verbindung der Rovings an den Kreuzungspunkten geschuldet sein. Aufgrund der Diskretisierung mit einem Voxelnetz teilen sich einzelne Elemente von zwei unterschiedlichen Rovings mit unterschiedlicher Faserrichtung einen Knoten und sind somit fest verbunden. In Realität sind hingegen zwei sich kreuzende Rovings mit Matrixmaterial verklebt und nicht fest miteinander verbunden.



Ein weiterer Grund für den Unterschied zwischen den Streckungen kann das Rovingmodell mit der vereinfachten Modellierung der Nichtlinearität im Spannungs-/Dehnungsdiagramm aus Abbildung 50 sein. Aus diesem Grund werden die Modellparameter des Rovingmodells angepasst, so dass die Schädigung in dem Spannungs-/Dehnungsdiagramm einsetzt, sobald die Spannungskurve des virtuellen Experiments von dem elastischen Anstieg abweicht, wie in Abbildung 53 dargestellt. Des Weiteren wird der Bruch der Rovingelemente initiiert sobald die spezifische innere Energie des Rovingmodells  $E^{RM}$  der spezifischen innere Energie des virtuellen Experiments  $E^{vE}$  entspricht. Diesen Sachverhalt stellt Abbildung 53 anhand der schraffierten Flächen unter den Spannungsverläufen dar. Die aus Abbildung 53 abgeleiteten Parameter für Schädigungsbeginn und Bruch sind in Tabelle 10 zusammengetragen.

Die nachfolgende Simulation entspricht der vorherigen Untersuchung des Mesomo-

Tabelle 10: Schädigungs- und Bruchparameter für das Rovingmodell, ermittelt aus Abbildung 53

$\frac{R_{\perp}^{(+)}}{\text{GPa}}$	$\frac{R_{\perp}^{(-)}}{\text{GPa}}$	$\frac{R_{\perp\parallel}}{\text{GPa}}$	$p_{\perp\parallel}^{(-)}$	$p_{\perp\parallel}^{(+)}$	$p_{\perp\perp}^{(-)}$	$p_{\perp\perp}^{(+)}$
0,062	0,090	0,045	0,450	0,200	0,040	0,400
$\frac{B_{\perp}^{(+)}}{\text{GPa}}$	$\frac{B_{\perp}^{(-)}}{\text{GPa}}$	$\frac{B_{\perp\parallel}}{\text{GPa}}$	$b_{\perp\parallel}^{(-)}$	$b_{\perp\parallel}^{(+)}$	$b_{\perp\perp}^{(-)}$	$b_{\perp\perp}^{(+)}$
0,296	1,272	0,310	0,450	0,200	1,150	0,400

dells bis auf die Parameter für Anriss und Bruch des Werkstoffmodells aus Abschnitt 5.3. Die Parameter aus den Tabellen 8 und 9 werden durch die Parameter aus Tabelle 10 ersetzt. Abbildung 54 zeigt die mit dem Mesomodell berechnete Kraft/Streckungskurve im Vergleich zum Kraftverlauf des Experiments aus Abschnitt 5.1 sowie den Konturplot mit der Anstrengung  $F_{ZFE}$  passend zum Punkt S. Der elastische Anstieg im  $F_z/\lambda_z$ -Diagramm in Abbildung 54a ist im Vergleich zu Abbildung 52a gleich groß, da die elastischen Parameter nicht verändert wurden.

Der Punkt S in Abbildung 54a bei dem in dem Mesomodell erstmals Schädigung in den Rovingelementen einsetzt, stimmt mit dem Punkt des Experiments am Rohr überein, bei dem die Kraftkurve erstmals von dem initialen Anstieg abweicht. Der nichtlineare Verlauf der Kraftkurve des Experiments wird nun von dem Mesomodell in Abbildung 54a deutlich besser als in Abbildung 52a abgebildet. Die Bruchkraft von  $|F_z| = 14,5 \text{ kN}$  des Experiments wird von dem Mesomodell mit  $|F_z| = 13 \text{ kN}$  etwas unterschätzt. Die Streckung bei Bruch  $\lambda_z = 0,9887$  von dem Mesomodell in Abbildung 54a bildet ebenfalls das Experiment mit  $\lambda_z = 0,9875$  deutlich besser als in Abbildung 52a ab. Die mit dem Mesomodell prognostizierte Bruchkraft und Bruchstreckung weichen um etwa 10 % von der experimentellen Messung aus Abschnitt 5.1 ab.

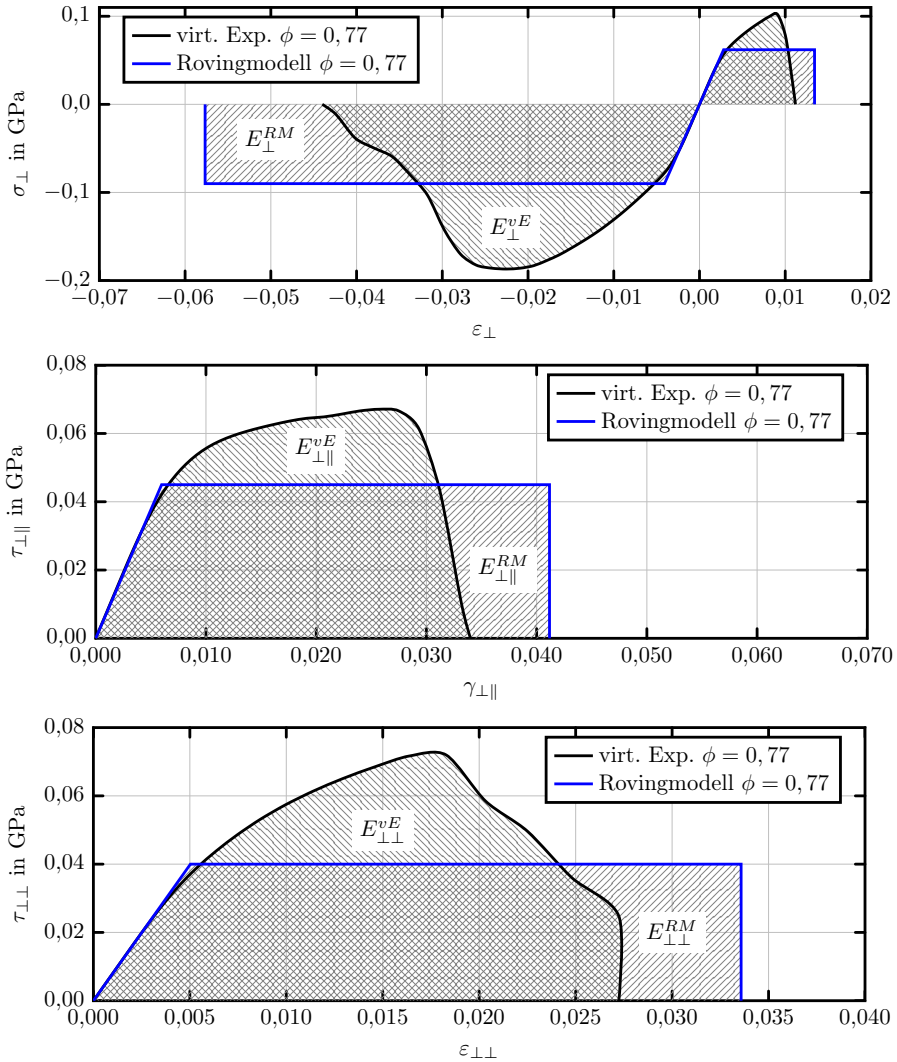


Abbildung 53: Modellvergleich der virtuellen Experimente (virt. Exp.) aus Abbildung 44 und dem Rovingmodell mit den modifizierten Parametern. (oben) unter Zug-/Drucklast im  $\sigma_{\perp}/\varepsilon_{\perp}$ -Diagramm, (mitte) unter Schublast im  $\tau_{\perp||}/\gamma_{\perp||}$ -Diagramm, (unten) unter Schublast im  $\tau_{\perp\perp}/\gamma_{\perp\perp}$ -Diagramm

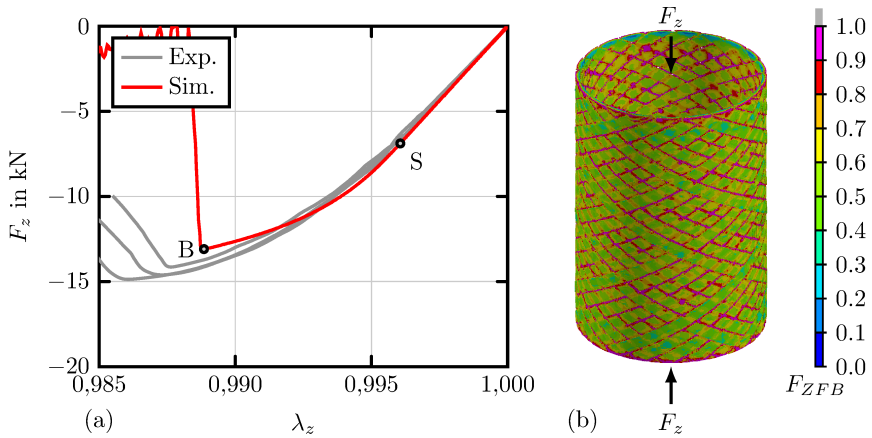


Abbildung 54: Simulation des Druckversuchs aus Abschnitt 5.1 mit dem Mesomodell und angepassten Bruchparametern. (a) Vergleich zwischen Experiment und Simulation im  $F_z/\lambda_z$ -Diagramm, (b) Anstrengung auf Zwischenfaserbruch  $F_{ZFB}$  der Roving-Elemente

**Erkenntnis 13.** Mit dem bilinearen Modellansatz für das Rovingmodell aus Abschnitt 5.3 und den aus Abbildung 53 ermittelten Parametern für Anriss und Bruch können die Bruchkraft und die Bruchstreckung von den Rohrprüfkörpern mit einer Abweichung von 10 % prognostiziert werden.

Auch wenn in Abbildung 53 jeweils das Spannungsniveau des horizontalen Bereichs der Spannungskurve von dem Rovingmodell bis zu zweimal geringer als die maximale Spannung der virtuellen Experimente ist, wird zwischen den Bruchkräften aus Experiment und Simulation in Abbildung 54 eine geringere Abweichung von 10 % beobachtet. Abbildung 54b zeigt passend zu dem Punkt S in Abbildung 54a, dass nur wenige Elemente an den Rovinggrenzflächen die Anstrengung  $F_{ZFB} = 1$  erreichen und somit Schädigungsbeginn einsetzt. Bei einer weiteren Laststeigerung werden überwiegend diese Elemente geschädigt und die umliegenden Elemente erfahren nur geringfügige Schädigungen. Die Abweichungen in der Spannung zwischen virtuellem Experiment und Rovingmodell aus Abbildung 53 treten im Mesomodell somit nur bei wenigen Elementen auf. Aus diesem Grund kann mit dem bilinearen Rovingmodell die Kraft und der Verzerrungszustand des FKVs gut abgebildet werden. Die Kraftkurven der Simulationen in den Abbildungen 52 und 54 schließen die im Experiment ermittelte Kraftkurve ein. Das Kraftniveau wird somit maßgeblich von dem Anriss- und Bruchparameter des Rovingmodells bestimmt. Die Streckung beim Bruch wird von beiden Simulationen in den Abbildungen 52 und 54 unterschätzt. Dieser Effekt wird in Verbindung mit dem Voxelnetz gebracht.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der Arbeit ist die Versagensprognose von FKV mittels Mehrskalenmodellen am Beispiel eines Rohrprüfkörpers. Zur Erfüllung des Ziels wurde die geometrische Diskretisierung der Rohrstruktur von BERGER [3] verwendet und Werkstoffmodelle für den Roving und die Matrix in ein Finite Element Programm (FE-Programm) implementiert. Die Parameter der Werkstoffmodelle zur Abbildung des Rovings und der Matrix wurden mittels virtuellen Experimente an FKV-Mikrostrukturen und Werkstoffprüfungen an der Matrix ermittelt. Mit dieser Methode ist eine realistische Versagensprognose von FKV möglich.

Die Prüfung des Matrixmaterials erfolgte unter den Lasten Zug, Druck und Torsion. Dabei stellte sich eine Druckabhängigkeit der Fließspannung heraus, weshalb ein geeignetes Plastizitätsmodell nach DRUCKER-PRAGER [5] in ein FE-Programm implementiert wurde. Eine unidirektional verstärkte (UDV), skalierte Mikroprobe wurde quer zur Faserrichtung unter Drucklast beansprucht, um die Versagensmechanismen in einer Mikrostruktur experimentell beobachten zu können. Die beobachteten Versagensmechanismen können mit dem Werkstoffmodell der Matrix abgebildet werden.

Anschließend wurde ein Experiment mit einer unskalierten UDV Glasfaser/Epoxidharzprobe (UD-Probe) unter Drucklast quer zur Faserrichtung durchgeführt. Durch den Vergleich der skalierten und unskalierten UDV Prüfkörper gelang die Ausarbeitung nötiger Modifikationen an dem Werkstoffmodell der Matrix, um das an Makroproben kalibrierte Werkstoffmodell der Matrix auf Mikroskala einsetzen zu können.

Für ein virtuelles Experiment mit Mikromodellen ist ein geeignetes repräsentatives Volumenelement (RVE) nötig. Der Vergleich des Experiments mit der unskalierten UDV-Probe und dem virtuellen Experiment ermöglichte die Auswahl eines geeigneten RVEs hinsichtlich Filamentanordnung, Dimension, Elementierung und Größe. Die geometrische Diskretisierung des RVEs erfolgte als Vorbereitung einer industriellen Umsetzung mit einem Voxelnetz. Bedingt durch diese Vernetzung wird ein Kohäsivzonenmodell für den Übergang zwischen Filament und Matrix benötigt. Ein solches Modell wurde integriert und anhand der unskalierten UDV-Probe kalibriert. Mit Hilfe der virtuellen Experimente können schließlich die effektiven elastischen Eigenschaften sowie die Bruchkurven von UDV FKV vorhergesagt werden. Die mit den virtuellen Experimenten ermittelten Bruchkurven stimmen mit den experimentellen Beobachtungen von PUCK [22] überein.

Zur Versagensprognose von FKV mit Makro- und Mesomodellen wurde ein Werkstoffmodell für den matrixversetzten Roving implementiert und anhand der virtuellen Experimente kalibriert. Das Werkstoffmodell beschreibt eine transversal isotrope Elastizität sowie den Schädigungsbeginn und Bruch mit jeweils einem separaten PUCK-Modell [22]. In Verbindung mit einem Makro- und Mesomodelle wird das Versagen eines gewickelten Glasfaser/Kunststoffrohrs (GFK-Rohr) mittels dem Werkstoffmodell für den Roving prognostiziert und mit dem entsprechenden Experiment verglichen. Das Makromodell diskretisiert die Rohrstruktur mit unidirektionalen Einzelschichten und ermöglicht lediglich eine Prognose der Struktursteifigkeit. Mit dem Makromodell können keine Aussagen bezüglich des Versagens getroffen werden. Das Mesomodell bildet die Rovingstruktur des GFK-Rohrs ab und ermöglicht eine detaillierte Aus-

ge bezüglich hochbelasteter Bereiche. Die zum Bruch führende Kraft und Streckung kann mit dem Mesomodell mit einer Abweichung von 10 % bezüglich des Experiments am GFK-Rohr prognostiziert werden.

Um eine Verbesserung der Versagensprognose von FKV zu erzielen ist eine Erweiterung des Mesomodells und der dazugehörigen Werkstoffmodelle nötig.

Aufgrund der Diskretisierung der FKV mit einem Voxelnetz teilen sich zwei kreuzende Rovings an den Berührungsstellen die gemeinsamen Knoten in dem Mesomodell, so dass die Rovings fest miteinander verbunden sind. Da der Abstand der zwei sich kreuzenden Rovings beliebig klein werden kann, ist eine Verfeinerung des Voxelnetzes nicht zielführend. In einem Element müssen daher die beiden unterschiedlich gerichteten Rovingbestandteile und die Matrix im Zwischenraum modelliert werden. Dieses Problem könnte beispielsweise mit der *extended finite element method* (XFEM) gelöst werden.

Ein zweiter Verbesserungsvorschlag ist die Erweiterung des Werkstoffmodells für den Roving, so dass mit diesem Modell die Nichtlinearität der Spannungs/Dehnungskurven von den virtuellen Experimenten besser abgebildet werden können.

Aufgrund der Implementierung aller Werkstoffmodelle in ein FE-Programm mit expliziter Zeitintegration sind dynamische Untersuchungen möglich. Zum Studium des Einflusses dynamischer Effekte ist aufbauend auf diese Arbeit die *Crash*-Belastung des GFK-Rohrs interessant.

## Literatur

- [1] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. SpringerLink : Bücher. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 9783642241185.
- [2] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui und C. Parimi. „Arbitrary discontinuities in finite elements“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50.4 (2001), S. 993–1013. ISSN: 1097-0207.
- [3] A. Berger. „Numerical Modelling of Composite Materials Based on a Combined Manufacturing-Crash Simulation“. Diss. Queen Mary University of London, 2014.
- [4] J. Betten. *Kontinuumsmechanik - Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. Bd. 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [5] D.C. Drucker und W. Prager. *Soil Mechanics and Plastic Analysis Or Limit Design*. Techn. Ber. Brown University, 1951.
- [6] VDI-Gesellschaft Materials Engineering und VDI Society Material Engineering. „Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund – Berechnungen“. In: *VDI 2014 Blatt 3*. 2006.
- [7] B. Fiedler, M. Hojo, s. Ochiai, K. Schulte und M. Ando. „Failure behavior of an epoxy matrix under different kinds of static loading“. In: *Composites Science and Technology* 61 (2001), S. 1615–1624.
- [8] U. Galcanetto und M. H. F. Aliabadi. *Multiscale Modeling in Solid Mechanics - Computational Approches*. Bd. 3. Imperial College Press, 2010.
- [9] GOM. *Homepage GOM*. <http://www.gom.com/de/>. Dez. 2015.
- [10] C. González und J. LLorca. „Mechanical behavior of unidirectional fiber-reinforced polymers under transverse compression: Microscopic mechanisms and modeling“. In: *Composites Science and Technology* 67 (2007), S. 2795–2806.
- [11] A. A. Gusev, P. J. Hine und I. M. Ward. „Fiber packing and elastic properties of a transversely random and unidirectional glass/epoxy composite“. In: *Composites Science and Technology* 60 (2000), S. 535–541.
- [12] Z. Hashin. „Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites“. In: *Journal of Applied Mechanics* 47 (2 1980), S. 329–334.
- [13] R. Hill. „Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 11 (1963), S. 357–372.
- [14] B. Kaiser. „Wickelsimulation und Homogenisierung von glasfaserverstärkten Kunststoffen“. Diplomarbeit. Fachhochschule Gießen Friedberg, 2010.
- [15] M. Kästner. „Skalenübergreifende Modellierung und Simulation des mechanischen Verhaltens von textilverstärktem Polypropylen unter Nutzung der XFEM“. Dissertation. Technische Universität Dresden, 2010.

- [16] M. Kästner, G. Haasemann, J. Brummund und V. Ulbricht. „Computation of Effective Stiffness Properties for Textile-Reinforced Composites Using X-FEM“. English. In: *Mechanical Response of Composites*. Bd. 10. Computational Methods in Applied Sciences. Springer Netherlands, 2008, S. 261–279. ISBN: 978-1-4020-8583-3.
- [17] M. Kästner, S. Müller und Ulbricht V. „{XFEM} Modelling of Inelastic Material Behaviour and Interface Failure in Textile-Reinforced Composites“. In: *Procedia Materials Science* 2 (2013). Materials Science Engineering, Symposium {B6} - Hybrid Structures, S. 43 –51. ISSN: 2211-8128.
- [18] E. H. Lee. „Elastic plastic deformation at finite strain“. In: *J. Appl. Mech.* 36.36 (1969), S. 1–6.
- [19] H. Lippmann und J. Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 1996. ISBN: 9783540609803.
- [20] N. Moës, J. Dolbow und T. Belytschko. „A finite element method for crack growth without remeshing“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.1 (1999), S. 131–150. ISSN: 1097-0207.
- [21] O. Mohr. *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials*. Z. d. VDI 24. Z. d. VDI, 1900.
- [22] A. Puck. *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminanten - Modelle für die Praxis*. Carl Hanser Verlag München Wien, 1996.
- [23] A. Puck, J. Kopp und M. Knops. „Guidelines for the determination of the parameters in Puck’s action plane strength criterion“. In: *Composites Science and Technology* 62.3 (2002), S. 371 –378. ISSN: 0266-3538.
- [24] A. Puck und H. Schürmann. „Die Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern“. In: *Kunststoffe* 72.9 (1982), S. 554–561.
- [25] A. Puck und H. Schürmann. „Failure analysis of {FRP} laminates by means of physically based phenomenological models“. In: *Composites Science and Technology* 62.12–13 (2002), S. 1633 –1662. ISSN: 0266-3538.
- [26] R. Quinson, J. Perez, M. Rink und A. Pavan. „Yield criteria for amorphous glassy polymers“. In: *Journal of Materials Science* 32.5 (1997), S. 1371–1379.
- [27] K.L. Reifsnider, G.P. Sendekyj, S.S. Wang, W.S. Johnson, W.W. Stinchcomb, N.J. Pagano und M.N. Nahas. „Survey of Failure and Post-Failure Theories of Laminated Fiber-Renforced Composites“. In: *Journal of Composites Technology & Research* 8.4 (4 1986), S. 138–153.
- [28] F.J. Schirmaier, J. Weiland, L. Kärger und F. Henning. „A new efficient and reliable algorithm to determine the fracture angle for Puck’s 3D matrix failure criterion for {UD} composites“. In: *Composites Science and Technology* 100.0 (2014), S. 19 –25. ISSN: 0266-3538.
- [29] H. Schürmann. *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. VDI-Buch. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

- [30] J.C. Simo und T.j.R. Huges. *Computational Inelasticity*. Springer -Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997.
- [31] C. T. Sun und R. S. Vaidya. „Prediction of Composite Properties from a Representative Volume Element“. In: *Composites Science and Technology* 56 (1996), S. 171–179.
- [32] В. Л. Колмогоров. *Напряжения, Деформации, Разрушение*. Металлургия, 1970.
- [33] E. Totry, C. González und J. LLorca. „Failure locus of fiber-reinforced composites under transverse compression and out-of-plane shear“. In: *Composites Science and Technology* 68 (2007), S. 829–839.
- [34] E. Totry, J. M. Molina-Aldareguía, C. González und J. LLorca. „Effect of fiber, matrix and interface properties on the in-plane shear deformation of carbon-fiber reinforced composites“. In: *Composites Science and Technology* 70.6 (2010), 970–980. ISSN: 0266-3538.
- [35] H. Tresca. „Mémoire sur l'écoulement des corps solides“. In: *Mémoires Pres par Div Savants* 18 (1868), S. 733–799.
- [36] D. Trias, J. Costa, J. A. Mayugo und J. E. Hurtado. „Random models versus periodic models for fibre reinforced composites“. In: *Computational Materials Science* 38 (2006), S. 316–324.
- [37] D. Trias, J. Costa, A. Turon und J.E. Hurtado. „Determination of the critical size of a statistical representative volume element (SRVE) for carbon reinforced polymers“. In: *Acta Materialia* 54.13 (2006). Selected Papers from the Meeting “Micromechanics and Microstructure Evolution: Modeling, Simulation and Experiments” held in Madrid/Spain, 11–16 September 2005, S. 3471 –3484. ISSN: 1359-6454.
- [38] V. Ulbricht. *Studienbrief Kontinuumsmechanik*. 1997.
- [39] o. V. *Datasheet glass fiber roving EC 1200-315*. [Online; Stand 22. Februar 2016]. 2010. URL: [http://www.pd-fibreglass.com/cms/index.php?option=com\\_remository&Itemid=174&func=startdown&id=520&lang=de](http://www.pd-fibreglass.com/cms/index.php?option=com_remository&Itemid=174&func=startdown&id=520&lang=de)
- [40] o. V. *Kunststoffe - Bestimmung der Zugeigenschaften*. DIN EN ISO 527-2:2012-06. Juni 2012.
- [41] o. V. *Virtual Performance Solution 2013 - Solver Reference Manual*. 2013.
- [42] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer -Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [43] L. Yang, Y. Yan, Z. Ran und Y. Liu. „A new method for generating random fibre distributions for fibre reinforced composites“. In: *Composites Science and Technology* 76 (2013), 14–20. ISSN: 0266-3538.



## A Anhang

### A.1 Vergleich elastischer Stoffgesetze - St. Venant / Truesdell / Jaumann

Vor- und Nachteile der Materialmodelle (34) bis (38) werden anschließend in zwei ausgewählten Beispielen anhand der Spannung gegenübergestellt. Dabei wird von einem isotropen Elastizitätstensor nach Gleichung (29) mit den LAMESchen Konstanten  $\lambda = 4,5 \text{ GPa}$  und  $\mu = 1,125 \text{ GPa}$  ausgegangen. In beiden Beispielen wird ein Hexaederelement mit den Kantenlängen  $L_x = L_y = L_z = 10 \text{ mm}$  in der Ausgangskonfiguration verwendet.

Abbildung 55 zeigt das erste Beispiel, in dem die Bewegung des Elements durch

$$x = \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) X \quad (136)$$

$$y = Y \quad (137)$$

$$z = Z \quad (138)$$

vorgegeben ist. Die Größe  $\tau$  stellt in diesem Zusammenhang eine Bezugszeit zur Normierung der Zeit  $t$  dar. Aufgrund der gegebenen Bewegung des Hexaederelements können alle nötigen Deformations- und Verzerrungsgrößen in den Gleichungen (34) bis (38) berechnet werden. Gleichung (34) liefert direkt die gesuchte Spannung  $\sigma_{xx}^V$ . Die Gleichungen (36) und (38) liefern jeweils eine Differentialgleichung mit denen die Spannungen  $\sigma_{xx}^T$  und  $\sigma_{xx}^J$  berechnet werden könnten. Die Spannungsfunktionen

$$\sigma_{xx}^V = (\lambda + 2\mu) \frac{t(t + \tau)(t + 2\tau)}{2\tau^3} \quad (139)$$

$$\sigma_{xx}^T = (\lambda + 2\mu) \frac{t}{\tau} \quad (140)$$

$$\sigma_{xx}^J = (\lambda + 2\mu) \ln \frac{t + \tau}{\tau} \quad (141)$$

sind in Abbildung 55 in dem Diagramm in Abhängigkeit der Verschiebung  $u$  aufgetragen.

Das ST. VENANT-Material zeigt einen konkaven Kurvenverlauf. Aus diesem Grund kann für einen Spannungszustand mehr als ein Verzerrungszustand existieren. Im Grenzbereich  $u \rightarrow -10 \text{ mm}$  verschwindet das Volumen des Hexaederelements. Die Spannung  $\sigma_{xx}^V$  des ST. VENANT-Materials strebt gegen Null. Dies ist jedoch unphysikalisch. Physikalisch sinnvoll ist die Spannungsantwort ausgehend von der JAUMANNschen Spannungsgeschwindigkeit. Bei verschwindendem Volumen gilt  $\sigma_{xx}^J \rightarrow -\infty$ , welches als Wachstumsbedingung bezeichnet wird. Die Spannungsantwort ausgehend von der TRUESDELLschen Spannungsgeschwindigkeit erfüllt zwar nicht die Wachstumsbedingung, zeigt jedoch einen linearen Zusammenhang gegenüber der Verschiebung. Somit ist einem Spannungszustand immer nur ein Verzerrungszustand zugeordnet.

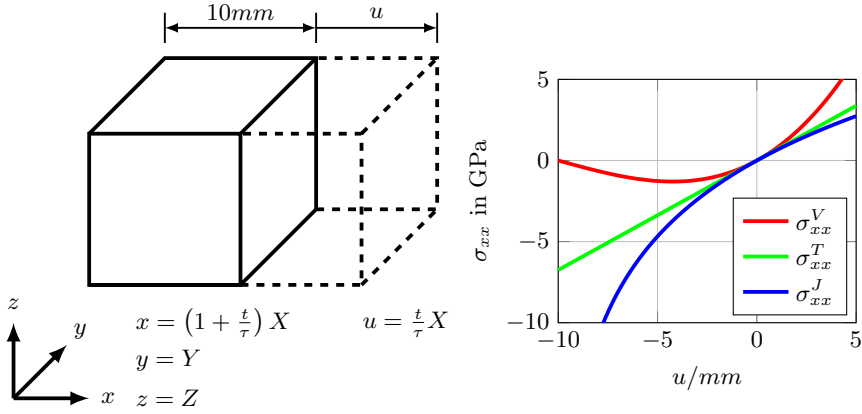


Abbildung 55: Modellvergleich (34), (36) und (38) unter Zuglast ohne Querdehnung

Abbildung 56 zeigt das zweite Beispiel mit den vorgegebenen Bewegungen

$$x = X + \frac{t}{\tau} Z \quad (142)$$

$$y = Y \quad (143)$$

$$z = Z \quad (144)$$

Dabei handelt es sich um den einfachen Schublastfall. Das weitere Vorgehen ist identisch zu dem ersten Beispiel, so dass für die Spannungsfunktionen

$$\sigma_{zx}^V = \mu \frac{t}{\tau} + (\lambda + 2\mu) \frac{t^3}{2\tau^3} \quad (145)$$

$$\sigma_{zx}^T = \mu \frac{t}{\tau} \quad (146)$$

$$\sigma_{zx}^J = \mu \sin\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (147)$$

folgt. Die Darstellung der Funktionen über der Verschiebung  $u$  ist entsprechend der Abbildung 56 zu entnehmen. In diesem Beispiel zeigt die Spannungsantwort ausgehend von der JAUMANNschen Spannungsgeschwindigkeit ein Oszillieren um die Spannungsnullachse bei zunehmender Verschiebung der oberen Fläche. Diese Materialantwort ist unphysikalisch im Gegensatz zu den beiden anderen Materialien.

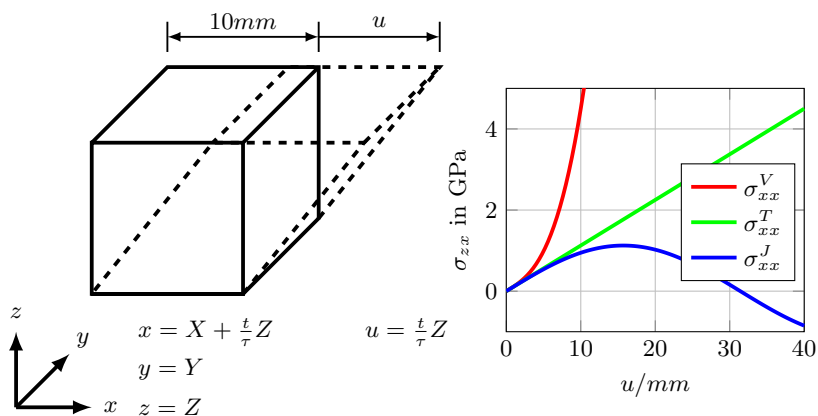


Abbildung 56: Modellvergleich (34), (36) und (38) unter einfachen Schub

Den linearen Elastizitätstensor nach Gleichung (29) in Verbindung mit der TRUESDELLSchen Spannungsgeschwindigkeit zu postulieren, stellt auf Grundlage der vorherigen Beispiele die beste Möglichkeit dar.

## A.2 Numerische Implementierung des Drucker-Prager Fließgesetzes

Die numerische Implementierung soll mit dem Programm PAMCRASH in einem expliziten Integrationsalgorithmus erfolgen. So erfolgt beispielsweise für die Integration der Spannung

$$\sigma_{ij}|_{n+1} = \sigma_{ij}|_n + \dot{\sigma}_{ij}|_n \Delta t = \sigma_{ij}|_n + \Delta \dot{\sigma}_{ij}|_n \quad . \quad (148)$$

Die Größen mit  $|_n$  stellen dabei den bekannten Zustand des letzten Zeitschritts dar, wohingegen Größen mit  $|_{n+1}$  den noch unbekannten Zustand des aktuellen Zeitschritts beschreiben.

Die Fließfläche bezüglich der Fließbedingung (67) stellt in der Deviatorebene einen Kreis dar. Aus diesem Grund ist es möglich den RADIAL-RETURN-Algorithmus anzuwenden, wie er beispielsweise von SIMO (30) beschrieben wird. Bezogen auf das hier beschriebene Problem, folgt der Zusammenhang

$$\frac{s_{ij}|_{n+1}}{\sigma_{vM}|_{n+1}} = \frac{s_{ij}^{trial}|_{n+1}}{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1}} \quad . \quad (149)$$

Mit der bereits in (51) eingeführten Probespannungsgeschwindigkeit und  $B = 0$  folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}|_{n+1} &= \sigma_{ij}^{trial}|_{n+1} - C_{ijkl} d_{kl}^p|_n \Delta t \\ &= \sigma_{ij}^{trial}|_{n+1} - 3G \frac{s_{ij}^{trial}|_{n+1}}{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1}} \Delta \gamma|_n \quad . \end{aligned} \quad (150)$$

Die Multiplikation von (150) mit  $\frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{trial}|_{n+1}}{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1}}$  führt zur VON MISES Vergleichsspannung in der Momentankonfiguration in der Form

$$\sigma_{vM}|_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{trial}|_{n+1}}{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1}} \sigma_{ij}|_{n+1} = \sigma_{vM}^{trial}|_{n+1} - 3G \Delta \gamma|_n \quad . \quad (151)$$

Aufgrund von  $B = 0$  wird der hydrostatische Druck nicht von der Fließregel beeinflusst.

$$p|_{n+1} = p^{trial}|_{n+1} \quad (152)$$

Die numerische Umsetzung des Materialmodells in die USERMAT-Umbegung in PAMCRASH ist anhand des nachfolgenden Pseudocodes dargestellt.

**Algorithm 1** USERMAT – Matrix

---

```

1: procedure UMAT_MATRIX_SLV( $d_{ij}|_n$ ,  $w_{ij}|_n$ ,  $\varepsilon_{eq}^p|_n$ ,  $s_{ij}|_n$ ,  $p|_n$ )
2:    $l_{ij}|_n = d_{ij}|_n + w_{ij}|_n$ 
3:    $\Delta\sigma_{ij}^{trial}|_n = \left[ C_{ijkl} d_{kl}|_n + l_{ik}|_n \sigma_{kj}|_n + \sigma_{ik}|_n l_{jk}|_n - \sigma_{ij}|_n l_{kk}|_n \right] \Delta t$ 
4:    $p|_{n+1} = p|_n - \frac{1}{3} \Delta\sigma_{kk}^{trial}|_n$ 
5:    $s_{ij}^{trial}|_{n+1} = s_{ij}|_n + \Delta\sigma_{ij}^{trial}|_n - \frac{1}{3} \Delta\sigma_{kk}^{trial}|_n$ 
6:    $\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^{trial}|_{n+1} s_{ij}^{trial}|_{n+1}}$ 
7:    $\Phi^{trial}|_{n+1} = \sigma_{vM}^{trial}|_{n+1} - 3 A p|_{n+1} - \sigma_y (\varepsilon_{eq}^p|_n)$ 
8:   if  $\Phi^{trial}|_{n+1} \leq 0$  then ▷ elastischer Schritt
9:      $s_{ij}|_{n+1} = s_{ij}^{trial}|_{n+1}$ 
10:     $\varepsilon_{ij}^p|_{n+1} = \varepsilon_{ij}^p|_n$ 
11:   else ▷ plastischer Schritt
12:      $n_{ij}|_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{trial}|_{n+1}}{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1}} + A \delta_{ij}$ 
13:      $H|_n = \max \left( \bar{H} (\varepsilon_{eq}^p|_n); -0,95 \cdot 3 G \frac{\sigma_y (\varepsilon_{eq}^p|_n)}{\sigma_{vM}|_n} \right)$ 
14:      $\Delta\gamma|_n = \frac{n_{ij}|_{n+1} \Delta\sigma_{ij}^{trial}|_n}{3 G + \frac{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1}}{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1} - 3 A p|_{n+1}} H (\varepsilon_{eq}^p|_n)}$ 
15:      $\sigma_{vM}|_{n+1} = \sigma_{vM}^{trial}|_{n+1} - 3 G \Delta\gamma|_n$ 
16:      $s_{ij}|_{n+1} = \frac{\sigma_{vM}|_{n+1}}{\sigma_{vM}^{trial}|_{n+1}} s_{ij}^{trial}|_{n+1}$  ▷ radial Return
17:      $\varepsilon_{eq}|_{n+1} = \varepsilon_{eq}^p|_n + \frac{\sigma_{vM}|_{n+1}}{\sigma_{vM}|_{n+1} - 3 A p|_{n+1}} \Delta\gamma|_n$ 
18:   end if
19: end procedure

```

---